TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Leena Venho
Funktion käsitteen opetus peruskoulussa ja lukiossa
Diplomityö

Tarkastaja: Sirkka-Liisa Eriksson
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden tiedekunnan tiedekuntaneuvoston
kokouksessa 4.2.2015

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
LEENA VENHO: Funktion käsitteen opetus peruskoulussa ja lukiossa
Diplomityö, 63 sivua, 12 liitesivua
Huhtikuu 2015
Pääaine: matematiikka
Tarkastaja: professori Sirkka-Liisa Eriksson
Avainsanat: funktio, funktion käsite, oppikirja-analyysi, opetus

Funktio on yksi tärkeimmistä käsitteistä matematiikassa ja luonnontieteissä. Funktion käsite perustuu joukko-oppiin. Joukko-oppi ei varsinaisesti sisälly Opetushallituksen hyväksymiin valtakunnallisen opetussuunnitelman perusteisiin, jotka määräävät, mitä opetuksen tulee sisältää peruskoulussa ja lukiossa.

Ensin tässä tutkimuksessa selvitetään, millaisen kuvan peruskoulun ja lukion pitkän matematiikan oppikirjat antavat funktiosta. Tutkimukseen valittiin yhteensä kuusi oppikirjaa. Peruskoulun ja lukion pitkän matematiikan oppikirjat analysoitiin laadullisella sisällönanalyysillä. Lukion oppikirjat määrittelevät funktion vastaavuutena ja peruskoulun oppikirjat sääntönä, joka kuvaa riippuvuutta. Lähimpänä funktion matemaattista määritelmää on funktion ymmärtäminen vastaavuutena. Oppikirjojen erot ovat kaiken kaikkiaan vähäisiä.

Toiseksi tutkimuksessa selvitetään, mistä lähtökohdista opettajat suunnittelevat opetustaan ja mitä he pitävät tärkeänä funktion käsitteen opetuksessa. Matematiikan opettajille lähetettiin sähköinen kyselylomake, josta kerätty aineisto käsiteltiin tilastollisin menetelmin.

Kyselytutkimuksen perusteella oppikirja ja opettajan omat kokemukset ovat tärkeimmät opetuksen suunnitteluun liittyvistä tekijöistä. Opettajat pitävät tärkeänä funktion ymmärtämistä riippuvuutena, mikä tukee oppikirjojen näkemystä. Lukion opettajat pitävät funktion ymmärtämistä vastaavuutena tärkeämpänä kuin peruskoulun opettajat.

Funktion käsite on selvästi hankala opetettava asia ja se jää epätäsmälliseksi sekä oppikirjoissa että opetuksessa. Lukiossa mahdollisuudet matemaattisempaan esitystapaan olisi olemassa.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Master's Degree Programme in Science and Engineering
LEENA VENHO : Teaching the concept of function
Master of Science Thesis, 63 pages, 12 Appendix pages
April 2015
Major: Mathematics
Examiner: Professor Sirkka-Liisa Eriksson
Keywords: function, the concept of function, textbook analysis, teaching

The function is one of the most important concepts in mathematics and natural sciences. The concept of function is based on the set theory. The national core curriculum does not include the set theory. The national core curriculum determines which contents in the comprehensive school and general upper secondary school education are included. The national core curriculum is determined by the Finnish National Board of Education.

First in this research we are found out what kind of image mathematics textbooks affords the function in comprehensive school and in the advanced mathematics syllabus in upper secondary school. Six textbooks were chosen for this research. The contents of the textbooks were analyzed with qualitative methods. The textbooks in upper secondary school define that the function is a correspondence and the textbooks in comprehensive school define that the function is a rule that stands for dependence. In this research the function can be understood as a correspondence that is a nearest equivalent to the mathematical definition of the function. Overall, the differences between the textbooks are minor.

Secondly, in the survey we are found out how mathematics teachers plan their teaching and what they consider important in teaching the concept of function. The electrical questionnaire was sent to mathematics teachers. The data was processed using statistical methods. According to the survey the textbooks and the teacher's own experience affect most planning of teaching. The teachers consider that it is important to learn to think the function as a dependence. This is also supported by the view of textbooks. Teachers in upper secondary school consider that it is more important to learn to think the function as a correspondence than teachers in comprehensive school.

The concept of function is clearly difficult to teach and it is inexact both in teaching and in textbooks. In upper secondary school the representation of function could be more mathematical.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on kirjoitettu Tampereen teknillisen yliopiston Matematiikan laitokselle vuosien 2014-2015 aikana. Työn aihe yhdistää matematiikan ja kasvatustieteet, jotka kummatkin ovat minun mielenkiinnon kohteita. Tulevana opettajana koen, että diplomityössä tutkituista asioista ja pohdituista ajatuksista on hyötyä.

Ensimmäiseksi haluan kiittää diplomityöni ohjaajaa Sirkka-Liisa Erikssonia mielenkiintoisen aiheen löytymisestä ja neuvoista työn tekemisen aikana. Käydyt keskustelut ovat auttaneet ajatusten ja siten koko diplomityön jäsentymisessä.

Lisäksi kiitän opiskelutovereitani Katri Koposta ja Heidi Tuorilaa koko opiskeluajasta, mutta etenkin keskusteluista diplomityöprosessiin liittyen ja oikolukuavusta. Kiitän aviomiestäni Jannea avusta LaTeX:in käytössä, lukuisista pohdinnoista diplomityöhöni liittyen sekä kannustuksesta. Viimeisenä vaan ei vähäisimpänä kiitän vanhempiani tuesta ja kannustuksesta opiskeluun sekä veljeäni esimerkistä ja avusta niin monessa asiassa opiskelujeni aikana.

Tampereella 2015

Leena Venho

SISÄLLYS

1. JOHDANTO

Funktio on yksi tärkeimmistä ja käytetyimmistä käsitteistä matematiikassa ja luonnontieteissä. Funktioilla esitetään matemaattisia malleja. Monet monimutkaisesti selitettävät asiat ovat esitettävissä funktion avulla helpottaen, nopeuttaen ja yksinkertaistaen laskentaa.

Funktion käsite määritellään matematiikan osa-alueista joukko-opissa. Joukko-oppi ja logiikka olivat keskeisessä asemassa suomalaisen peruskoulun matematiikassa 1970-luvulla. Aikakautta, jolloin matematiikan opetuksen haluttiin pohjautuvan ymmärtämiselle, kutsutaan uuden matematiikan ajaksi. Käytännönläheisyyden ja konkreettisuuden puuttumisen vuoksi sekä oppilaat että opettajat kokivat uuden matematiikan haastavaksi ja aikaa vieväksi. Pikkuhiljaa alettiin siirtyä opetuksessa takaisin aritmetiikkaan, geometriaan ja algebraan. Nykyisin peruskoulussa ja lukiossa joukko-oppia on enää hyvin vähän.

Nykyisin funktion käsite esitellään ensimmäisen kerran yläkoulussa yleensä yhdeksännellä luokalla. Lukiossa käsitteen ymmärtämistä on tarkoitus syventää ja laajentaa. Varsinaisesti funktion joukko-opilliseen määritelmään ja ominaisuuksiin tutustutaan vasta yliopistotason matematiikassa.

Funktion käsite on abstrakti ja sen syvällinen ymmärtäminen vaatii matemaattista ajattelukykyä. Abstraktista käsitteestä voi syntyä monenlaisia mielikuvia ja ajattelutapoja, kun käsitettä ei voida opettaa konkreettisesti tai käytännön esimerkein. Funktion käsitteen opetuksessa on tehtävä kompromisseja huomioiden oppilaiden kehitystaso ja pohjatiedot.

Tässä tutkimuksessa selvitetään, millaisen kuvan peruskoulun ja lukion pitkän matematiikan oppikirjat antavat funktiosta ja mitä matematiikan opettajat pitävät tärkeänä funktion käsitteen opetuksessa. Lisäksi tutkimuksessa selvitetään opetuksen suunnittelun lähtökohtia ja mitä opettajat haluaisivat oppilaiden ymmärtävän funktiosta. Erityisesti on kiinnostavaa selvittää oppikirjan merkitystä opetuksen suunnittelussa, jotta tiedetään, voidaanko vetää johtopäätöksiä oppikirjojen antaman kuvan funktion käsitteestä ja opettajien tärkeänä pitämien asioiden välillä. Tutkimuksessa selvitetään myös, onko yläkoulun opettajilla ja lukion opettajilla, opettajan opetusvuosien määrällä tai sukupuolella eroa funktion käsitteen opetuksessa.

Työn toisessa luvussa esitellään funktion käsite sekä matematiikassa että peruskoulun ja lukion valtakunnallisten opetussuunnitelman perusteiden pohjalta. Oppikirjan merkitystä opetuksessa avataan kolmannessa luvussa. Tutkimuksen tutkimuskysymykset apukysymyksineen esitellään neljännessä luvussa.

Varsinainen tutkimus koostuu kahdesta osasta. Ensin tutkitaan oppikirjoja laadullisella sisällönanalyysillä, jonka tutkimusmenetelmät ja aineiston esittely ovat viidennessä luvussa ja tulokset kuudennessa luvussa. Toisena osana on kyselytutkimus matematiikan opettajille. Oppikirja-analyysiä pidetään esitutkimuksen asemassa kyselytutkimukselle. Kyselytutkimuksen aineiston analysoinnissa käytetyt tilastolliset menetelmät ja tutkimuksen toteutus esitellään seitsemännessä luvussa ja tulokset kahdeksannessa luvussa. Yhdeksännessä luvussa vedetään yhteen tutkimuksen tulokset ja tehdää niistä johtopäätöksiä.

2. FUNKTIO

Opetushallituksen hyväksymät opetussuunnitelman perusteet ovat perustana opetukselle sekä peruskoulussa että lukiossa. Opetussuunnitelman perusteet määräävät, mitä koulutuksen järjestäjän velvoitetaan sisällyttämään opetukseen sekä antaa peruskoulun päättöarvionnin kriteerit arvosanalle 8. Lisäksi opetussuunnitelman perusteissa käsitellään oppimisympäristöä ja toimintakulttuuria, joiden avulla pyritään takaamaan tasa-arvoiset mahdollisuudet kaikille alueellisesti ja yksilöllisesti. Opetuksen järjestäjällä on vastuu laatia paikallinen tai koulukohtainen opetussuunnitelma, joka noudattaa valtakunnallisia opetussuunnitelman perusteita. Koulukohtaisen opetussuunnitelman tulee täsmentää ja täydentää perusteissa olevia tavoitteita ja keskeisiä sisältöjä [1]. Ylioppilaskirjoitusten tarkoitus on selvittää, kuinka hyvin opiskelijat ovat omaksuneet lukion opetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot [2].

Funktion käsite ja siihen liittyviä käsitteitä esiintyy sekä peruskoulun että lukion opetussuunnitelman perusteissa. Opetussuunnitelman perusteet eivät ota kantaa matematiikan didaktiikkaan eli opetusoppiin eivätkä opetussuunnitelman perusteissa mainittujen käsitteiden sisältöihin. Opetussuunnitelman perusteissa mainitaan esimerkiksi funktion käsite, mutta ei kerrota, mitä funktion käsite tarkoittaa.

Tässä luvussa käsitellään ensin funktion käsitettä matematiikassa. Funktio määritellään joukko-opissa tietynlaisena relaationa. Toiseksi tarkastellaan funktion käsitettä peruskoulun ja lukion pitkän matematiikan valtakunnallisten opetussuunnitelmien perusteiden pohjalta.

2.1 Funktio matematiikassa

Useimmat differentiaali- ja integraalilaskennan keskeiset ideat olivat olemassa 1600-luvun puoliväliin mennessä. Differentiaali- ja integraalilaskenta kehittyi etenkin tähtitieteen tarpeisiin ja geometriaan liittyen. Kalkyylin eli yhtenäisen laskennallisen metodin differentiaali- ja integraalilaskentaan kehittivät Isaac Newton ja Gottfried Leibniz 1600-luvun loppupuolella. Leibniz kehitti uusia merkintätapoja ja otti käyttöön uusia nykyisinkin käytössä olevia symboleja differentiaali- ja integraalilaskentaan. Leibniz otti käyttöön termin *funktio*, jota hän käytti kuvaamaan käyrän laatua kuten kaarevuutta tai erityistä pistettä. [3]

1700-luvulla Leonhard Euler tuotti oppikirjoja, joista *Introductio* kokosi analyysin peruskäsitteet funktiokäsitteen ympärille. Euler määritteli funktion vaihtelevasti muun muassa muuttujista ja vakioista kootuksi lausekkeeksi tai koordinaatistoon piirretyn käyrän havainnollistamaksi riippuvuudeksi. Hän otti käyttöön funktiomerkinnän $f(x)$. Ennen Euleria funktion oli ymmärretty tarkoittavan laskulausekkeen tulosta, mutta Euler esitti ajatuksen funktiosta minkä tahansa lukujen välisenä yhteytenä.

Eulerin aikakaudella matematiikka eteni nopeasti eikä matematiikan loogisiin perusteisiin kiinnitetty juurikaan huomiota. 1800-luvulla matematiikkaa täsmennettiin. 1800-luvulla etenkin Augustin Cauchy, Bernhard Riemann ja Karl Weierstrass tutkivat kompleksilukumuuttujan kompleksilukuarvoisia funktioita ja matematiikkaan syntyi uusi osa-alue, jota kutsutaan funktioteoriaksi. Peter Dirichlet tutki muun muassa Fourier-sarjoja ja päätyi tutkimuksissaan vuonna 1837 moderniin funktion määritelmään, joka on suomennettuna: *"Jos muuttuja y liittyy muuttujaan x siten, että aina kun x:lle annetaan jokin lukuarvo, on olemassa sääntö, jonka perusteella y saa yksikäsitteisen lukuarvon, niin y:n sanotaan olevan x:n funktio."* [3]

Nykyisin funktion määritelmä matematiikassa perustuu joukko-oppiin ja relaatioihin. Joukko-oppi sisältää joukon, osajoukon ja alkion käsitteitä, joukkojen laskutoimituksia ja ominaisuuksia. Yleisesti tunnettuja lukujoukkoja ovat esimerkiksi luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut ja reaaliluvut.

Lähteenä tässä esitettävään funktion määrittelyyn on käytetty Lipschutzin joukko-opin teosta [4, s. 64-66, 94-95]. Funktion määrittelyä varten määritellään ensin *karteesinen tulo*. Joukossa alkioiden järjestyksellä ei ole väliä, kun taas esimerkiksi järjestetyssä parissa alkioiden järjestys on merkitsevä. Seuraavissa määritelmissä joukot X ja Y ovat mielivaltaisia joukkoja.

Määritelmä 1 (Karteesinen tulo)**.** Joukkojen X ja Y karteesinen tulo on järjestettyjen parien joukko $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ ja } y \in Y\}$.

Relaatio on kahden tai useamman joukon välinen ominaisuus tai suhde. Relaatiolla voi olla ominaisuuksia kuten refleksiivisyys, irrefleksiivisyys, symmetrisyys, antisymmetrisyys ja transitiivisuus. Relaatio määritellään seuraavasti.

Määritelmä 2 (Relaatio)**.** Olkoon X ja Y joukkoja ja $R \subset X \times Y$. Tällöin R on relaatio joukon X ja joukon Y välillä. Jos $(x, y) \in R$ niin sanotaan, että x on relaatiossa alkion y kanssa ja tämä merkitään xRy. Jos $X = Y$, niin sanotaan, että R on relaatio joukossa X tai joukon X relaatio. Joukko X on relaation lähtöjoukko ja Y on maalijoukko. Lisäksi määritellään relaation R määrittelyjoukko

$$\mathcal{D}(R) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \exists R\} \subset X$$

ja arvojoukko

$$\mathcal{R}(R) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \exists R\} \subset Y.$$

Funktio määritellään tietyntyyppisenä relaationa. Seuraavassa joukot X ja Y ovat edelleen mielivaltaisia joukkoja. Määritellään funktio seuraavasti.

Määritelmä 3 (Funktio)**.** Relaatio $f \subset X \times Y$ on funktio eli kuvaus, jos jokaisella $x \in \mathcal{D}(f)$, $y, z \in Y$ on voimassa

$$(xfy) \wedge (xfz) \Longrightarrow y = z.$$

Toisin sanoen jokaista alkiota $x \in \mathcal{D}(f)$ kohti on olemassa sellainen yksikäsitteinen alkio $y \in Y$, että xfy. Tämä yksikäsitteinen y on funktion arvo tai kuva pisteessä x ja x on alkion y alkukuva. Tällöin käytetään merkintää $y = f(x)$ merkinnän xfy sijasta ja merkintää $f : \mathcal{D}(f) \to Y$ merkinnän $f \subset X \times Y$ sijasta. Jos $\mathcal{D}(f) = X$, niin merkitään $f : X \to Y$.

Funktio on siis määriteltävissä matematiikassa täsmällisesti. Funktion matemaattinen määritelmä on useimpien matematiikan käsitteiden tapaan abstrakti eli sitä ei voi aistein havaita. Tietystä käsitteestä voi syntyä monenlaisia mielikuvia ja ajattelutapoja eri ihmisille. Käsitteen muodostuksen kannalta on olennaista pyrkiä syvälliseen ymmärtämiseen, jolloin käsitettä voidaan käsitellä kokonaisuutena menemättä yksityiskohtiin esimerkiksi käsitteen ominaisuuksissa tai laskuprosessissa.

Funktion käsitteen ymmärtämistä ovat tutkineet esimerkiksi Vinner ja Dreyfus [5]. College-opiskelijoille, opettajille ja matemaatikoille suunnatussa tutkimuksessa selvitettiin, miten funktion käsite ymmärretään ja mitä funktion käsitteeseen liittyviä ominaisuuksia pidetään tärkeinä. Tutkimuksen kyselylomakkeessa oli funktioon liittyviä tehtäviä ja kysymys, mikä on funktio vastaajan mielestä. Vastaukset luokiteltiin kuuteen eri luokkaan (*funktiokäsitysluokkaan*) sen mukaisesti, minkälaisena funktion määritelmä tai toiminnallisuus ymmärrettiin. Seuraavaksi esitellään tutkimuksessa käytetyt kuusi funktiokäsitysluokkaa.

Vastaavuus (Correspondence): Funktio on kahden joukon alkioiden välinen vastaavuus siten, että kutakin ensimmäisen joukon alkiota vastaa täsmälleen yksi jälkimmäisen joukon alkio.

Riippuvuusrelaatio (Dependence Relation): Funktio on kahden muuttujan välinen riippuvuusrelaatio eli kuvaa kahden muuttujan välistä riippuvuutta.

Sääntö (Rule): Funktio kuvaa riippuvuutta, joka on säännönmukaista.

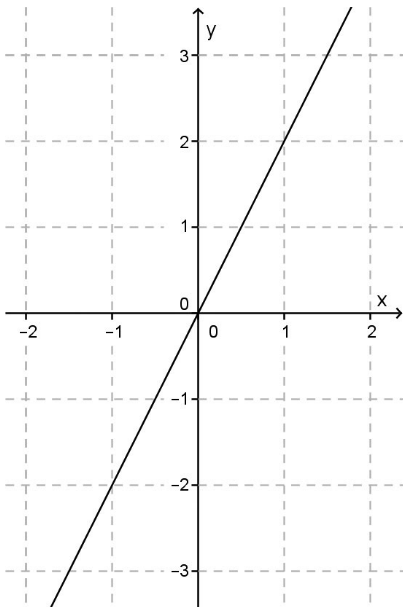
Operaatio (Operation): Funktion muuttujan arvoa operoimalla saadaan funktion arvo.

Kaava (Formula): Funktio on kaava, algebrallinen lauseke tai yhtälö.

Representaatio (Representation): Funktio määritellään käyttämällä sen yhtä representaatiota eli *esitystapaa*, joka voi olla verbaalinen (sanoin), visuaalinen (graafinen), numeerinen (taulukoidut arvot) tai algebrallinen (symbolinen).

Esimerkiksi lineaarisen reaalifunktion $f(x) = 2x$ eri representaatiot ovat:

- algebrallinen/symbolinen: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$
- verbaalinen: Funktion arvo on annetun reaalilukumuuttujan arvo kaksinkertaisena.
- visuaalinen/graafinen:



- numeerinen: lineaarisen reaalifunktion muuttujan arvoja ja niitä vastaavat funktion arvot taulukoituna

Muuttujan arvo	Funktion arvo
2	4
1	2
0	0
-1	-2

Tutkimuksessa suurin osa opettajista ja matemaatikoista määritteli funktion vastaavuudeksi. College-opiskelijoista suurin osa määritteli funktion riippuvuusrelaatioksi. Kaikkien vastanneiden noin 300 henkilön joukosta vastaavuuden ja riippuvuusrelaation ryhmiin funktio oli määritelty lähes yhtä monta kertaa. Sen sijaan funktiota määriteltiin operaatioksi hyvin vähän. [5]

2.2 Funktio peruskoulun matematiikassa

Voimassa olevan Opetushallituksen vuonna 2004 hyväksymien perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden [1] mukaan matematiikan opetuksen on edettävä systemaattisesti ja sen tulee luoda kestävä pohja matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. Opetussuunnitelman mukaan jo peruskoulun alimmilla luokilla 1.-5. keskeisenä sisältönä ovat säännönmukaisuudet, suhteet ja riippuvuudet sekä 3.-5. luokilla myös koordinaatisto. Nämä luovat pohjan ylemmillä luokilla 6.-9. tulevalle funktiokäsitteelle ja siihen liittyvälle keskeiselle sisällölle.

6.-9. luokalla keskeisenä sisältönä pidetään esimerkiksi riippuvuuden havaitsemista ja sen esittämistä muuttujien avulla tai suoraan ja kääntäen verrannollisuus, mitkä ovat jatkoa alempien luokkien tavoitteisiin. Muita 6.-9. luokan keskeisiä sisältöjä ovat funktion käsite, lukuparin esittäminen koordinaatistossa, yksinkertaisten funktioiden tulkitseminen ja piirtäminen koordinaatistoon, funktion nollakohdan, suurimman ja pienimmän arvon sekä funktion kasvamisen ja vähenemisen tutkiminen. Polynomifunktioista lineaarinen funktio on ensimmäinen opetettava funktiotyyppi. [1]

Funktion joukko-opillinen lähestyminen vaatisi, että koulussa olisi käsitelty joukko-oppia. Joukko-oppi ei kuitenkaan kuulu peruskoulun opetussuunnitelman perusteisiin. Nykyisessä opetuksessa joudutaan siis lähestymään funktion käsitettä eri näkökulmasta. Termistön ja käsitteiden helpottaminen voi kuitenkin johtaa matemaattisen tarkkuuden menettämiseen ja aiheuttaa käsitteellisiä ongelmia.

Vinnerin ja Dreyfusin tutkimuksessa ei havaittu merkittäviä eroja eri tasolla matematiikkaa opiskelevien college-opiskelijoiden välillä [5]. Myös Suomessa englanninkielisen yläkoulun oppilaille ja vertailuryhmänä käytettyjen lukiolaisten avulla tehdyn suuntaa antavan opinnäytetyönä tehdyn tutkimuksen tulokset ovat samansuuntaisia [6]. Käsitys funktiosta näyttää syntyvän yläkoulussa ja tämä funktiokäsitys vaikuttaa olennaisesti myös funktiokäsitykseen myöhemmässä vaiheessa. Funktion käsite saattaa olla hankala ymmärtää ja saattaa aueta opiskelijoille vasta yliopistotasolla.

2.3 Funktio lukion pitkässä matematiikassa

Lukion opetussuunnitelman perusteet sisältää kaikki lukion pitkän matematiikan pakollisten ja valtakunnallisten syventävien kurssien tavoitteet ja keskeiset sisällöt. Lukion pitkässä matematiikassa on kymmenen pakollista kurssia ja kolme syventävää kurssia. Pitkän matematiikan tavoitteena on tarjota opiskelijalle matemaattiset valmiudet ammatillisiin opintoihin ja korkeakouluopintoihin [7].

Pitkän matematiikan ensimmäinen kurssi (MAA1) on aiheeltaan funktiot ja yhtälöt. Kurssin tavoitteena on syventää funktiokäsitteen ymmärtämistä tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita. Keskeisiin sisältöihin kuuluvat siis potenssi- ja ekspontenttifunktiot.

Toisen kurssin (MAA2) aiheena on polynomifunktiot. Kurssin tavoitteena on harjaantua käsittelemään polynomifunktioita. Keskeisiä käsitteitä ovat muun muassa polynomi, polynomifunktio, polynomiyhtälö ja polynomiepäyhtälö.

Seitsemännen kurssin (MAA7) aiheena on derivaatta. Kurssin tavoittena on, että opiskelija omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta. Kurssi sisältää myös polynomifunktioita.

Kahdeksas kurssi (MAA8) käsittelee juuri- ja logaritmifunktioita. Kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluvat juurifunktiot ja -yhtälöt, eksponenttifunktiot ja -yhtälöt, logaritmifunktiot ja -yhtälöt sekä käänteisfunktion.

Yhdeksäs kurssi (MAA9) on aiheeltaan trigonometriset funktiot ja lukujonot. Trigonometrisia funktioita käsitellään kurssin ensimmäisellä puoliskolla. Kurssilla käsitellään trigonometriset funktiot, -yhtälöt ja trigonometristen funktioiden derivaatat.

Lukion viimeinen pakollinen kurssi (MAA10) sisältää integraalilaskennan. Yhtenä syventävänä kurssina (MAA13) on differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi. Kurssi sisältää pakollisilta kursseilta puuttuvia tietoja funktion ominaisuuksista kuten funktion jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta.

Ylioppilaskirjoituksissa suoraan tai epäsuorasti funktion käyttöön liittyviä tehtäviä on runsaasti. Ylioppilaskirjoituksissa käsitellään kattavasti eri funktiotyyppejä. Funktion ominaisuuksien tuntemista sen sijaan testataan vähemmän. Viime vuosina lähes jokaisessa matematiikan ylioppilaskokeessa on ollut tehtävä, jossa kokelaan tulee tietää funktion ominaisuuksia eikä ainoastaan käyttää funktiota. Useimmiten funktion ominaisuuksiin liittyvät tehtävät ovat kokeen kuuden viimeisen tehtävän joukossa, kun yhteensä tehtäviä on 15. Tehtävien sijoittuminen kokeen loppupäähän osoittaa niiden olevan keskimääräistä hankalampia tehtäviä, koska ylioppilaskokeen tehtävät ovat järjestetty suurinpiirtein vaikeustason mukaisesti helpoimmasta alkaen. Keväästä 2007 alkaen kokeen kaksi viimeistä tehtävää ovat olleet haastavampia ja niistä voi saada enemmän pisteitä.

Funktion ominaisuuksista tutkitaan tehtävissä useimmiten jatkuvuutta, derivoituvuutta ja kasvamista. Useissa ylioppilaskokeissa funktioon liittyvässä tehtävässä pyydetään antamaan esimerkki funktiosta, jonka ominaisuuksia on annettu tehtävänannossa. Tässä on esimerkkinä ylioppilaskokeen loppupäässä oleva tehtävä funktiosta. [8]

Esimerkki 1 (K2003, 10)**.** Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, jolla on ominaisuudet $f(0) = f(1) = 0$ ja $\int_0^1 f(x)\,dx = 100$.

Kun tehtävässä pyydetään vastaukseksi funktiota, tulee ilmoittaa funktion lauseke ja määrittelyjoukko. Kyseisen tehtävän vastausprosentti oli 28 % ja vastausten pistekeskiarvo 3,6. Yhdestä tehtävästä voi saada enimmillään kuusi pistettä lukuunottamatta ylioppilaskokeen kahta viimeistä tehtävää, joista voi saada yhdeksän pistettä. [8]

Seuraavassa esimerkissä on funktion ominaisuuksiin liittyvä tehtävä, joka on kokeen toiseksi viimeinen tehtävä.

Esimerkki 2 (S2007, 14)**.** Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \cos x$, on aidosti kasvava ja että se saa kaikki reaalilukuarvot. Päättele, että tällöin yhtälöllä $f(x) = 0$ on vain yksi ratkaisu, ja määritä se kolmen desimaalin tarkkuudella.

Tämäntyyppisessä tehtävässä nollakohta voidaan määrittää haarukoimalla tai jollakin kehittyneemmällä numeerisella menetelmällä kuten Newtonin menetelmällä. Numeeriset menetelmät kuuluvat syventäviin vapaavalintaisiin kursseihin. Graafisen laskimen antama nollakohdan likiarvo ei riitä vastaukseksi.

3. OPPIKIRJAT

Oppimateriaali on laaja käsite. Kirjallista oppimateriaalia ovat esimerkiksi oppikirjat, monisteet ja opettajan opas. Visuaalista materiaalia ovat diat, kalvot ja nykyisin sähköisesti esitettävä materiaali. Auditiivinen materiaali tarkoittaa esimerkiksi äänitteitä. Audiovisuaalisia materiaaleja ovat videot ja elokuvat. Lisäksi on muuta oppimateriaalia kuten oppimispelit. Tarkastellaan nyt erityisesti oppikirjoja. Oppikirjalla tarkoitetaan teosta, joka on laadittu opetustarkoituksiin tiettyyn oppiaineeseen tietylle ikäryhmälle ja se pohjautuu opetussuunnitelman perusteisiin.

3.1 Opetussuunnitelma ja oppikirja opetuksen suunnittelussa

Opetushallitus hyväksyy valtakunnalliset opetussuunnitelman perusteet, mutta oppikirjojen ja oppimateriaalien sisältöjä ei enää valvota. Opetushallitus luopui oppikirjojen tarkastamisesta vuonna 1992 [9, s. 12], jota ennen vain tarkastettuja ja hyväksyttyjä kirjoja sai käyttää oppikirjoina. Oppikirjavalmistajat pyrkivät noudattamaan opetussuunnitelmaa, mutta eri kirjojen tekijät voivat esimerkiksi painottaa opettavia asioita eri tavalla tai käyttää erilaisia lähestymistapoja opetettaviin asioihin.

Koulutuksen seurantaraportin mukaan vuonna 2012 noin neljä viidestä matematiikan opettajasta kertoi käyttävänsä työssään opetussuunnitelmaa [10]. Samansuuntaisia tuloksia on seurantaraporteissa vuosina 2004 ja 2011 [11; 12]. Opettajat käyttävät opetussuunnitelmaa eniten sisältöjen ja tavoitteiden tarkistamiseen. Vajaa neljäsosa opettajista hyödynsi opetussuunnitelmaa tukea tarvitsevien oppilaiden opetuksen suunnitteluun ja toteuttamiseen [11]. Ne opettajat, jotka olivat ilmoittaneet, etteivät käytä opetussuunnitelmaa työssään, opettivat enimmäkseen oppikirjan mukaan. Nämä tutkimukset eivät ota kantaa, kuinka merkittävässä roolissa opetuksen suunnittelussa on opetussuunnitelman hyödyntäminen verrattuna oppikirjan käyttöön.

3.2 Oppikirjan merkitys opetuksessa

Vuonna 2005 julkaistun väitöskirjan mukaan oppikirja vaikuttaa oleellisesti opetukseen, opetettaviin asioihin, etenemisjärjestykseen ja käytettyihin opetusmenetelmiin [13]. Opettajan kannalta oppikirjassa on valmiina kaikki tarvittava kuten sisällöt etenemisjärjestyksessä, ohjeita asioiden käsittelyyn ja tausta-aineistoa. Vuonna 2000 perusopetuksen päättövaiheessa oleville tehdyn tutkimuksen mukaan 95 % kouluista käytti matematiikan opetuksessa yhtä oppikirjaa ja osa lopuista kouluista käytti useampia kirjoja rinnakkain [14]. Alakoulujen opettajille tehdyn tutkimuksen mukaan opettajan opas ja oppikirja ovat erittäin keskeisessä asemassa matematiikan opetuksessa [15, s. 138], mutta kyseisessä tutkimuksessa suurin osa tutkimukseen osallistuneista opettajista oli suorittanut vain luokanopettajakoulutukseen kuuluvat monialaiset opinnot eikä erityisemmin matematiikan opintoja.

Lukion Pitkä matematiikka -sarjan kirjan esipuheessa kannustetaan oppikirjan käyttöön opiskelussa. Kirjan esimerkit ovat laadittu niin, että opiskelijat pystyvät omaksumaan ne itsenäisesti. Kun opiskelijat ohjataan käyttämään hyväkseen oppikirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia esimerkiksi sen sijasta, että tehdään vihkomuistiinpanoja, toivotaan opiskelijoiden pystyvän keskittymään opittavaan aiheeseen paremmin. Ajatuksena on, että opiskelijat työskentelevät itsenäisesti ja etenevät omassa tahdissaan, jolloin nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. [16]

Ruotsissa tehtyjen oppimateriaalitutkimusten yhteenvetona nousee esille viisi perustelua oppikirjan käytölle opetuksessa [17]. Ensinnäkin oppikirja antaa tarvittavat tiedot ja takaa, että opetussuunnitelman asiasisällöt tulevat käytyä läpi. Toiseksi oppikirja yhdistää opettajaa ja oppilaita. Oppikirja tuo ikäänkuin opettajalle ja oppilaille yhteisen toiminnan tarkoituksen. Kolmanneksi oppikirja helpottaa arviointia. Koska oppikirjat sisältävät vaaditut asiasisällöt, niin niiden pohjalta voidaan myös arvioida oppilaan osaamista. Neljänneksi oppikirja helpottaa myös muuten niin opettajan kuin oppilaiden työtä ja elämää. Opettajan ei tarvitse luoda kaikkea materiaalia itse eikä tarvita erikseen monisteita, tietokirjoja tai muuta oppimateriaalia vaan hän voi suunnitella opetuksen oppikirjan pohjalta. Toisaalta oppilaan on helppo ottaa kirja kotiin ja opiskella kotona. Viidenneksi oppikirja helpottaa luokkatilanteen hallintaa, koska oppilaat voidaan ohjata tekemään tehtäviä kirjasta. Oppilaat työskentelevät suurimman osan ajastaan luokassa oppikirjojen, tehtävämonisteiden ja muiden valmiiden materiaalien kanssa [18].

3.3 Hyvän oppikirjan tunnusmerkkejä

Hyvässä oppikirjassa opetettavat asiat on esitettävä ymmärrettävästi. Tieto on esitettävä suhteutettuna lukijan kehitystasoon ja taitoihin, ja esitystavan tulisi olla selkeä. Opettajille tehdyssä tutkimuksessa nousi esille oppimateriaalien innostavuuden tärkeys [13]. Hyvässä oppimateriaalissa olennaista on esimerkiksi oppimateriaalin rakenne, sisältöjen oikeellisuus, pedagogiset ratkaisut, tekstin vaikeustaso ja kiinnostavuus, opetusmenetelmälliset ratkaisut, kuvituksen havainnollisuus ja tehtävien monipuolisuus. Pedagogiset näkökohdat huomioidaan esittämällä asiat valikoidussa järjestyksessä niin, että oppilaalle muodostuu opittavasta asiasisällöstä hänen kehitystasolleen sopiva kokonaisuus [19].

Hyvät oppimateriaalit vaativat jatkuvaa kehitystä, vaikka valtakunnalliset opetussuunnitelman perusteet eivät välillä muuttuisikaan [13]. Esimerkiksi lukion matematiikan ylioppilaskirjoituksissa laskinohjeet ovat muuttuneet. Nykysin ylioppilaskirjoituksissa sallitaan kaikenlaiset laskimet, mikä vaikuttaa siihen, millaisia tehtäviä ylioppilaskokeessa on. Oppikirjat pyrkivät tarjoamaan harjoituksia ylioppilaskirjoituksia varten, joten oppikirjojen uusissa painoksissa on huomioitava tällaiset muutokset.

Vaikka oppikirjan merkitys opetuksessa on todettu monissa tutkimuksissa tärkeäksi, oppikirjan käytöstä huolimatta opetus voi olla monipuolista, ja opettajat käyttävät oppikirjan lisäksi muuta oppimateriaalia [9, s. 231-233]. Kuitenkin etenipä opetus oppikirjaa noudattaen tai koulun oman opetussuunnitelman pohjalta oppikirjaa hyödyntäen vain soveltuvin osin, oppilaat joka tapauksessa opiskelivat asiat yleensä oppikirjasta [9, s. 241].

Oppikirjan keskeisen aseman vuoksi opetusta voidaan tutkia tutkimalla oppikirjoja. Kuitenkin opettaja vastaa opetuksesta ja opetusmenetelmistä oppikirjasta huolimatta. Vain opetussuunnitelman asiasisällöt velvoittavat opettajaa.

4. TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tämä tutkimus pyrkii selvittämään, miten oppikirjat määrittelevät funktion ja miten oppikirjoissa lähestytään funktiokäsitettä. Tutkimuksessa käydään läpi peruskoulun oppikirjoja ja lukion pitkän matematiikan oppikirjoja. Toiseksi tutkimus pyrkii selvittämään, mistä lähtökohdista opettaja suunnittelee opetusta ja mitä hän pitää tärkeänä oppilaiden oppia funktion käsitteessä. Muotoillaan tutkimuskysymykset seuraavasti:

1. Miten oppikirjat määrittelevät funktion?
2. Millainen on oppikirjojen funktiokäsitys?
3. Mistä lähtökohdista opettajat suunnittelevat opetuksensa?
4. Mitä opettajat pitävät tärkeänä funktion käsitteen opetuksessa?
5. Mitä opettajat pitävät tärkeänä oppilaiden oppia funktiosta?

Lisäksi esitetään muutamia apukysymyksiä. Apukysymyksiä tutkimuskysymykseen 3 ovat:

- Miten luokkataso, jolla opettaja opettaa, vaikuttaa opetuksen suunnitteluun?
- Miten opettajan opetusvuosien määrä vaikuttaa opetuksen suunnitteluun?
- Miten opettajan sukupuoli vaikuttaa opetuksen suunnitteluun?

Apukysymyksiä tutkimuskysymykseen 4 ovat:

- Miten luokkataso, jolla opettaja opettaa, vaikuttaa funktion käsitteen opetukseen?
- Miten opettajan opetusvuosien määrä vaikuttaa funktion käsitteen opetukseen?
- Miten opettajan sukupuoli vaikuttaa funktion käsitteen opetukseen?

5. OPPIKIRJA-ANALYYSI

Laadullisen eli kvalitatiivisen tutkimuksen avulla pyritään pääsemään tuloksiin ilman tilastollisia tai muita määrällisiä menetelmiä. Laadullinen tutkimus pyrkii kokonaisvaltaiseen tutkittavan ilmiön haltuunottoon. Tarkoituksena on siis ilmiön kuvaaminen, ymmärtäminen ja mielekäs tulkitseminen. [20]

Laadullinen tutkimus rakentuu aiemmista aiheeseen liittyvistä tutkimuksista ja teorioista, empiirisestä aineistosta ja tutkijan omasta ajattelusta ja päättelystä [21]. Aineistoa voidaan laadullisessakin tutkimuksessa käsitellä määrällisesti esimerkiksi tilastoja analysoimalla.

Laadullista tutkimusta pidetään useimmiten aineistolähtöisenä ja määrällistä eli kvantitatiivista tutkimusta teorialähtöisenä, mutta erottelu on yksinkertaistava [21]. Tutkijan pyrkimyksenä on paljastaa odottamattomia havaintoja. Sen vuoksi tutkimuksen lähtökohtana ei ole teorian tai hypoteesin eli ennakko-oletuksen testaaminen vaan aineiston monipuolinen ja yksityiskohtainen tarkastelu [22]. Laadullisessa tutkimuksessa rakennetaan teoriaa aineistosta käsin. Laadullisessa tutkimuksessa ei aseteta hypoteeseja tuloksista vaan tutkija ottaa ennakkoluulottomasti vastaan kaiken, mitä havaitsee aineistosta.

Täydellistä objektiivisuutta on laadullisessa tutkimuksessa mahdotonta saavuttaa. Tutkimuksessa on tuotava esille lähtökohdat, mihin tutkijan tekemät ratkaisut perustuvat [23]. Laadullinen tutkimus on siten aina subjektiivinen. Tutkijan asema laadullisessa tutkimuksessa on tutkimustyypistä riippuen hyvinkin suuri tai mahdollisimman pieni.

Laadulliselle analyysille on tyypillistä, että tutkimuksen kohdejoukko valitaan tarkoituksenmukaisesti. Laadullisessa tutkimuksessa on pyrittävä valitsemaan sellainen perusjoukko, josta saadaan eniten tietoa tutkittavasta ilmiöstä. Tutkittavia ei valita satunnaisesti. Usein tutkittavia on vain vähän, koska suuren aineiston laadullinen analyysi olisi varsin työlästä eikä useinkaan tarkoituksenmukaista. Laadullisen tutkimuksen tavoite ei useimmiten ole pyrkiä yleistyksiin vaan tutkitaan ja pyritään tulkitsemaan yksittäistä tapausta. [20]

Tämä laadullinen tutkimus pyrkii kartoittamaan oppikirjojen tarjoamaa käsitystä funktiosta. Tutkimusmenetelmänä käytetään teorialähtöistä sisällönanalyysiä. Analyysissä käytetään luvussa 2 esitettyä Vinnerin ja Dreyfusin funktion määritelmän luokittelua, jonka perusteella vastataan tutkimuskysymyksiin 1 ja 2.

5.1 Tutkimusmenetelmät

Kvalitatiivisessa sisällönanalyysissä painopiste on ilmiön sisällöllisissä merkityksissä eikä esiintymistiheydessä [23]. Kvalitatiivisessa sisällönanalyysissä kuvataan aineiston luonne- tai rakennetekijöitä. Sisällönanalyysillä pyritään kuvaamaan aineistoa sanallisesti tiiviissä ja yleisessä muodossa. Aineiston tulee olla tekstimuotoista kuten esimerkiksi kirjat. Sisällönanalyysissä voidaan käyttää apuna myös määrällisiä menetelmiä.

Sisällönanalyysissä aineistosta muodostetaan *sisältöluokkia*. Sisältöluokkia on oltava riittävästi, jotta tutkimusongelma tulee kuvailluksi riittävän tarkasti, ja luokkien perusteella tulee saada asetettuihin tutkimuskysymyksiin pätevät vastaukset. Sisällönanalyysissä eritellään aineistojen samankaltaisuuksia ja erilaisuuksia. [23, s. 228]

Luokittelu tehdään *analyysiyksikön* avulla. Analyysiyksikkö voi olla jokin *aineistoyksikkö* esimerkiksi sana tai lause tai kokonainen ajatuskokonaisuus. Analyysiyksikön valinta perustuu aineiston laatuun ja tutkimuskysymyksiin. Jokainen analyysiyksikkö voidaan sijoittaa vain yhteen luokkaan eli luokkien on oltava toistensa poissulkevia.

Sisällönanalyysiä voi tehdä aineistolähtöisesti, teoriaohjaavasti tai teorialähtöisesti. Aineistolähtöisessä analyysissä analyysi etenee ja käsitteet luodaan aineiston pohjalta. Teoriaohjaavassa analyysissä käsitteet on jo tunnettu ja teorialähtöisessä analyysissa luokittelu perustuu aikaisempaan teoriaan eli tutkimuksen viitekehykseen. Teorialähtöisessä analyysissä analyysiä ohjaa valmis, aikaisempien tutkimusten perusteella luotu kehys, jolla testataan ja tarkastellaan teoriaa. Teorialähtöisestä analyysistä voidaan käyttää nimeä deduktiivinen analyysi eli yleisestä yksittäiseen suuntautuva analyysi. Teorialähtöistä analyysiä käytetään perinteisesti luonnontieteellisissä tutkimuksissa.

Sisällönanalyysin vaiheet esitellään seuraavaksi.

1. **Analyysirungon muodostaminen:** analyysiyksikön valinta ja sisältöluokkien muodostus viitekehyksen perusteella

2. **Aineiston koonti ja luokittelu:** samankaltaisuuksien etsintä aineistoista

3. **Jäsentely ja kuvaaminen:** johtopäätösten tekeminen

Tulokset esitetään joko käsitteellisesti tai tilastollisesti riippuen siitä, onko tutkimusote enemmän laadullinen vai määrällinen. Johtopäätöksiä tekemällä kootaan tulokset yhteen ja selitetään, mitä tutkimuksessa saadut tulokset tarkoittavat.

5.2 Tutkimuksen toteutus

Tässä tutkimuksessa sisällönanalyysi tehdään teorialähtöisesti eli luokittelu tehdään teoriassa esitetyn luokittelun mukaan. Tutkimuksessa halutaan selvittää, mikä on oppikirjojen funktiokäsitys ja miten oppikirjoissa lähestytään funktion käsitettä. Oppikirjojen analyysissä keskitytään oppikirjojen teoriaosioon ja aiheeseen liittyviin esimerkkeihin ja niiden kautta funktiokäsitteen lähestymistapaan. Harjoitustehtäviä ei analysoida.

Analyysiyksiköksi valitaan ajatuskokonaisuus. Ajatuskokonaisuus tarkoittaa sisällöltään samaa tarkoittavia lauseita, vaikka ne olisi muotoiltu tekstiksi erilaisin lauserakentein ja sanoin tai esitetty oppikirjoissa hieman eri tavoin. Tutkimuksessa käytetään Vinnerin ja Dreyfusin tutkimuksen funktion määritelmän luokkia ja luokitellaan oppikirjojen funktiokäsityksen niiden avulla. Luokat ovat esitelty luvussa 2.

Jokaisesta oppikirjasta tarkastellaan lähemmin kirjan antama funktion määritelmä ja selvitetään, mihin luokkaan funktion määritelmä kuuluu. Lisäksi johdannoista, teoriaosuuksista ja esimerkkitehtävistä etsitään eri funktiokäsitysluokkiin kuuluvia viitteitä. Tutkimuksen ulkopuolelle jää funktion sovellusten käsittely. Oppikirjasta riippuen tarkastellaan funktio-luvun jälkeisiä lukuja, mikäli sen koetaan olevan tarpeen kokonaisuuden muodostamiseksi.

Kun aineisto on saatu luokiteltua, jäsennellään tulokset. Tuloksista päätellään, millaisen funktiokäsityksen oppikirjat tarjoavat sekä analysoidaan funktion määritelmien eli eri luokkien merkityksiä oppikirjoissa. Sekä peruskoulun että lukion oppikirjat käsitellään samalla tavalla ja lopuksi vertaillaan myös peruskoulun ja lukion kirjojen tarjoamien funktiokäsitysten eroja.

5.3 Aineiston rajaus ja esittely

Tutkimukseen valittiin kolme käytetyintä oppikirjaa. Vuonna 2012 julkaistun koulutuksen seurantaraportin perusteella Laskutaito on yleisin yläkouluissa käytetty oppikirja, Kolmiota käytetään toiseksi eniten ja Piitä kolmanneksi eniten [12]. Tarkasteltaviksi peruskoulun oppikirjoiksi valittiin SanomaPro:n Laskutaito-kirjasarja ja Kolmio-tietokirja sekä Otavan Pii-kirjasarja.

Lukion pitkän matematiikan oppikirjasarjoja ovat SanomaPron:n Pitkä matematiikka, Pyramidi ja Pitkä Sigma sekä Otavan Laudatur ja Lukion Calculus. Lukion pitkän matematiikan oppikirjojen käytöstä ei löydy vastaavaa tutkimusta kuin peruskoulun oppikirjoista. Kolme tarkasteltavaa oppikirjaa valittiin niin, että valittiin yhdet kirjat molemmilta suomalaisilta oppikirjakustantamoilta. Tähän tutkimukseen valitaan SanomaPro:n Pyramidi ja Otavan Lukion Calculus-kirjasarja sekä kolmanneksi kirjaksi Otavan Laudatur. Pitkä matematiikka -kirjasarjan ensimmäinen oppikirja olisi valittu tutkimukseen myös oletetun suosituimmuuden vuoksi, mutta funktio määritellään vasta lukion toisen kurssin oppikirjassa. Tässä tutkimuksessa pyritään hakemaan mahdollisimman hyvin vertailtavissa olevia oppikirjoja, joten Pitkä matematiikka jätetään tutkimuksesta pois.

5.3.1 Laskutaito 9

Laskutaito-sarjan kirjat rakentuvat niin, että yhden oppitunnin opetuskokonaisuus esitetään yhdellä aukeamalla. Käytännössä aukeama sisältää teoriasivun ja tuntitehtäväsivun. Teoriasivulla on teorian lisäksi esimerkkejä. Harjoitustehtäväsivu on jaoteltu harjoittele-tehtäviin, jotka ovat perustehtäviä sekä sovella-tehtäviin, jotka ovat soveltavampia tehtäviä kuin perustehtävät. Kirjasta löytyy erillinen osio lisätehtäville lähes kaikkiin opetuskokonaisuuksiin. Lisätehtäväsivuilla on soveltavien tehtävien lisäksi tutkimustehtäviä. Kotitehtäväosio on myös erikseen kirjan takaosassa. Osaan tuntitehtävistä annetaan kirjan lopussa vastaukset.

Laskutaito-sarja kiinnittää huomiota erityisesti teoriaesityksen luettavuuteen, selkeyteen ja havainnollisuuteen sekä harjoitustehtävien huolelliseen valikointiin ja ryhmittelyyn. Kirjasarjan pyrkimyksenä on tarjota opettajalle materiaali, joka auttaa häntä toteuttamaan opetuksen tehokkaasti ja joustavasti ottaen huomioon oppilaiden erilaiset tarpeet ja oppimistyylit. Kirjasarjan tekijät toivovat esipuheessa oppilaiden saavuttavan kirjan avulla seuraavalla kouluasteella eli ammatillisessa koulutuksessa tai lukiossa tarvittavat tiedot ja taidot. [24]

Yhdeksännelle luokalle suunnattu kirja sisältää kolme isoa kokonaisuutta, jotka ovat avaruusgeometria, funktiot sekä yhtälöt ja yhtälöparit. Funktiot-aihekokonaisuutta edeltää siis avaruusgeometria. Lyhyeksi tiivistelmäksi sisällöstä funktiot-aihekokonaisuuden alussa kerrotaan, että luvussa *"opitaan funktion ja sen kuvaajan käsitteet. Opitaan lineaarisen funktion ja sen kuvaajan ominaisuudet sekä tutustutaan toisen asteen funktioihin ja paraabeleihin. Kerrataan suoraan verrannollisuus ja opitaan kääntäen verrannollisuus. Opitaan epäyhtälön graafinen ratkaiseminen."* [24, s. 61]

Funktiot-aihekokonaisuus on jaettu viiteen pienempään kokonaisuuteen, jotka on jaettu vielä pienempiin lukuihin, joista yksi luku on yhdessä oppitunnissa käytävä opetuskokonaisuus. Ensimmäinen kokonaisuus on funktio, jossa käydään läpi funktio, funktion arvo, funktion kuvaaja ja nollakohta sekä lämpötiloja. Toinen kokonaisuus on lineaarinen funktio, jossa käydään läpi lineaarinen funktio ja suora, lineaarisen funktion kuvaaja, lineaarisen funktion nollakohta, suoran kaltevuus, kulmakerroin ja vakiotermi, yhdensuuntaiset suorat, suoran yhtälön muodostaminen sekä kasvun lineaarinen mallintaminen. Kolman kokonaisuus on verrannollisuus, jossa käydään läpi tietoliikenne, verrannollisuus ja lineaarinen funktio, kääntäen verrannollisuus, kääntäen verrannollisia suureita sekä verrannollisuussovelluksia. Neljäs kokonaisuus on epälineaarisia funktioita, jossa käydään läpi toisen asteen funktio ja paraabeli, erilaisia paraabeleita, toisen asteen funktion nollakohdat, heittoliike, epäyhtälö sekä epäyhtälön ratkaiseminen graafisesti. Viides luku sisältää joustokappaleita, joita voidaan käydä läpi ajan niin salliessa. [24]

5.3.2 Kolmio

Kolmio tietokirja sisältää peruskoulun 7.-9. luokan matematiikan oppisisällöt. Kirjassa on selkeisiin kokonaisuuksiin jaettuna koko peruskoulun matematiikka. Tietokirjassa ei ole tehtäviä vaan tehtävät ovat erillisessä harjoituskirjassa. Tämä mahdollistaa sen, että jo läpi käytyihin asioihin voi palata milloin tahansa.

Kolmio sisältää kymmenen aihekokonaisuutta, jotka on jaettu pienempiin lukuihin. Aihekokonaisuudet on mitoitettu yhden kurssin mittaiseksi. Aihekokonaisuudet ovat laskuja rationaaliluvuilla, geometrisia kuvioita, luvuista kirjaimiin, polynomeja, lukuja ja ongelmia, yhtälö, epäyhtälö ja verrannollisuus, tasogeometria, prosenttilasku, funktioita ja tilastoja, trigonometria ja avaruusgeometria sekä todennäköisyys ja yhtälöpareja. Funktioita ja tilastoja -aihekokonaisuus sisältää luvut funktion käsite, suoran piirtäminen, paraabeli, funktion ominaisuuksia, verrannollisuus sekä tilastot. [25]

Kolmiossa on paljon melko lyhyitä esimerkkejä. Tekijät kutsuvat esimerkkejä neuvoviksi esimerkeiksi, jotka syventävät asian ymmärtämistä ja luovat paremmat edellytykset itsenäiseen opiskeluun [25]. Teoria on esitetty esimerkkien lomassa. Tärkeimmät asiat on laatikoitu, jotta ne erottuvat paremmin. Kirjan marginaalissa on myös tarvittaessa lisähuomautuksia.

5.3.3 Pii 9

Pii-kirjasarjan kirjat rakentuvat niin, että yksi luku on mitoitettu kahden oppitunnin laajuiseksi, mutta tarpeen mukaan lukuun voidaan käyttää aikaa yhdestä kolmeen oppituntia. Yksi luku sisältää teoriaa, joka on havainnollistettu useilla esimerkeillä. Harjoitustehtävät ovat jaettu kolmeen vaativuustasoon eli perustehtäviin, syventäviin ja soveltaviin tehtäviin. Vaatimustaso on merkitty jokaisen tehtävän kohdalle. Luvun lopussa on kotitehtäväsivu. Kirjan lopussa on vastauksia kertaustehtäviin sekä kotitehtäviin. Harjoitustehtäviin vastaukset löytyvät erillisestä vastauskirjasta, mutta vastauskirja ei tule oppikirjan mukana vaan on hankittava erikseen. [26]

Yhdeksännelle luokalle suunnattu kirja sisältää kolme suurempaa kokonaisuutta, jotka ovat kuvaajia ja yhtälöitä, kuvioita ja kappaleita sekä osista kokonaisuuksiin. Kuvaajia ja yhtälöitä -aihekokonaisuus sisältää 14 lukua, joista kaksi on kertaustehtäviä. Luvut ovat funktio, riippuvuus koordinaatistossa, suoran yhtälö, suoran yhtälön ratkaisematon muoto, erilaisia riippuvuuksia, kuvaajien piirtämistä ja tulkintaa, erilaisia yhtälöitä, yhtälö sanallisissa tehtävissä, kaksi yhtälöä ja kaksi tuntematonta, yhtälöparin ratkaiseminen piirtämällä, yhtälöparin ratkaiseminen laskemalla sekä yhtälöparin sovelluksia. [26]

Funktio-luvun aiheita ovat funktiokone, funktion arvo ja funktion määrittelevän lausekkeen etsiminen. Tämän jälkeen käsitellään funktion kuvaajia.

5.3.4 Pyramidi 1: Funktiot ja yhtälöt

Pyramidi 1: Funktiot ja yhtälöt on Pyramidi-kirjasarjan lukion pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin kirja. Pyramidin tavoitteena on matematiikan peruskäsitteiden vankka hallinta. Opetettavat asiat on tarkoitus opettaa kerralla kunnolla. Oppikirjassa on pyritty tiiviiseen ja selkeään esitystapaan. [27]

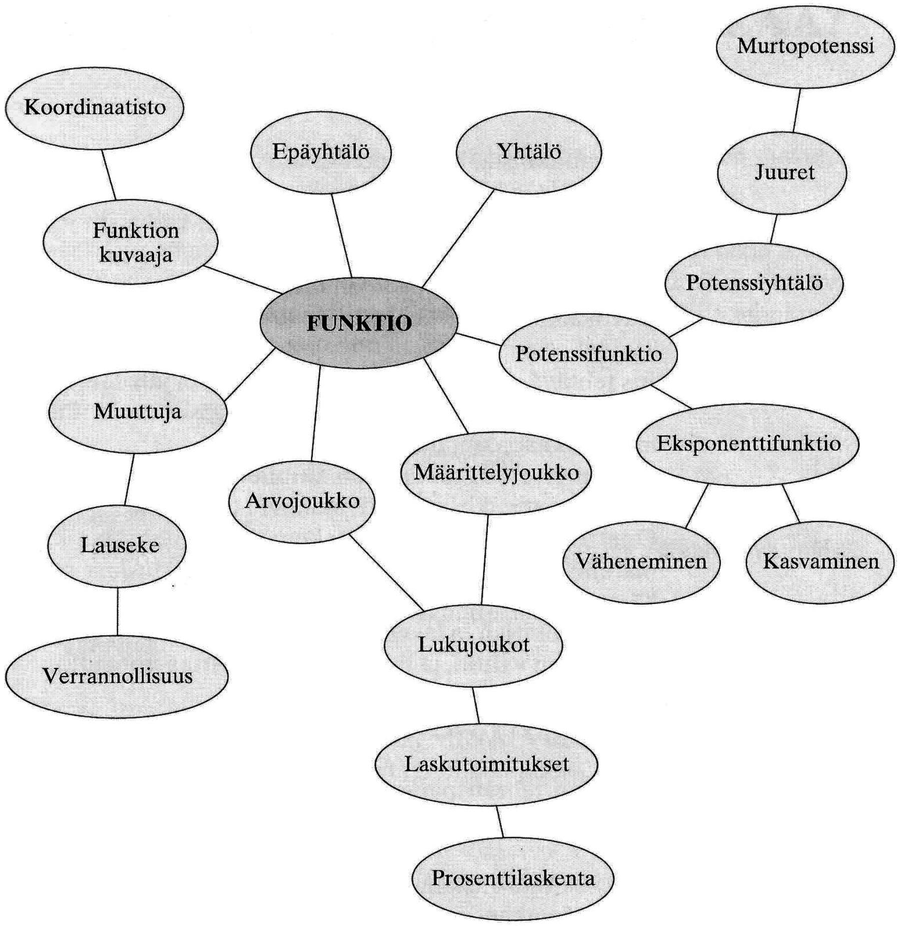
Pyramidissa yleensä luvun alussa on teoriaosuus, jossa tärkeimmät asiat on korostettu keltaisella laatikolla. Teorian yhteydessä on esimerkkitehtäviä. Teorian ja esimerkkien jälkeen ovat tehtäväsivut. Kirjassa on sekä helppoja että vaikeita tehtäviä, mutta tehtävien vaikeustasoa ei ole merkitty tehtäviin tai tehtäväsarjaan mitenkään. Pääpiirteissään tehtävät ovat kuitenkin järjestetty vaikeustason mukaan aloittaen helpoimmista tehtävistä. Kirja tarjoaa syventävää lisätietoa, joka ei kuulu varsinaisesti opetussuunnitelman perusteissa vaadittuun kurssisisältöön. Lisätietoa antavat sivut ja tehtävät on erotettu muusta asiasta merkitsemällä sivun reunat harmaaksi. Kirjan takana on vastaukset tehtäviin.

Kirja alkaa lukujoukkojen käsittelyllä. Kirjassa esitellään luonnollisten lukujen, kokonaislukujen, rationaalilukujen ja reaalilukujen lisäksi irrationaaliluvut sekä mainitaan, mitä ovat kompleksiluvut, jotka eivät sisälly lukion oppimäärään. Muita lukuja ovat potenssi, ensimmäisen asteen yhtälö, sovelluksia, jossa käsitellään verrannollisuuksia ja prosentteja, neliöjuuri, yleinen juuri ja murtopotenssi sekä funktio. Funktio-luvun alalukuja ovat määritelmä, funktion kuvaaja, potenssifunktio ja eksponenttifunktio. [27]

5.3.5 Laudatur 1: Funktiot ja yhtälöt

Laudatur 1: Funktiot ja yhtälöt on Laudatur-kirjasarjan lukion pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin kirja. Laudaturin tekijöiden tavoitteena on ollut tehdä selkeä, iloinen ja johdonmukainen oppikirja, jossa painotetaan käytännönläheisiä tehtäviä [28]. Mekaanisia tehtäviä on kirjassa runsaasti perustaitojen harjoitteluun. Kirja rakentuu teoria- ja esimerkkiosiosta, jonka jälkeen on kaksi tehtäväsarjaa. Ensimmäinen tehtäväsarja sisältää helpompia tehtäviä kuin toinen tehtäväsarja. Teoriaosassa tärkeät asiat ovat laatikoitu, jotta ne erottuvat.

Kirjan alussa on alkusanojen lisäksi selvitetty lyhyesti, millaista matematiikka on luonteeltaan sekä annettu opiskeluvinkkejä matematiikkaan. Myös kirjan aiheesta funktio on tehty käsitekartta, joka on kuvassa 5.1. Ajankäyttösuunnitelma on annettu sekä 45 minuutin että 75 minuutin oppitunteja varten erikseen. Kuhunkin lukuun kuluu noin 2-3 tuntia, kun oppitunnin pituus on 45 minuuttia.



Kuva 5.1: Laudaturin käsitekartta funktiosta [28, s. 8]

Kirja alkaa peruskäsitteillä, jossa käsitellään lukujoukkoja (luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut, reaaliluvut, kompleksiluvut), lukusuora, lukuvälejä sekä reaalilukujen laskulait. Seuraavat luvut sisältävät laskutoimituksia murtoluvuilla, potenssit, verrannollisuudet, prosenttilaskua, neliöjuuren, yleisen juuren ja murtopotenssin. Viimeiset luvut käsittelevät funktioita. Funktio-luvussa käsitellään funktion käsite sekä funktion kuvaaja ja nollakohda. Viimeiset kolme lukua käsittelevät potenssifunktiota, potenssiyhtälöä ja eksponenttifunktiota.

5.3.6 Lukion Calculus 1

Lukion Calculus 1 -oppikirja sisältää lukion kaksi ensimmäistä kurssia eli MAA1 Funktiot ja yhtälöt sekä MAA2 Polynomifunktiot. Oppikirjan alussa kerrataan aiemmin opittuja asioita. Kirjassa on huomioitu nopeasti etenevät ryhmät, mikä näkyy tehtävien runsautena ja täytentävänä materiaalina [29]. Täydentävän materiaalin asia ei kuulu perusopetusainekseen eikä opetussuunnitelman perusteisiin.

Ensimmäinen kurssi on jaettu kuuteen aihekokonaisuuteen, jotka ovat reaaliluvut, yhtälö ja epäyhtälö, prosenttilasku, potenssit ja juuret, funktio-oppia sekä matemaattinen mallintaminen. Matemaattinen mallintaminen on täydentävää materiaalia. Funktio-oppia –aihekokonaisuus on jaettu kuuteen lukuun, jotka ovat funktion käsite, funktion kuvaaja, verrannollisuus, potenssifunktio ja potenssiyhtälö, eksponenttifunktio sekä eksponentiaalinen kasvu ja väheneminen.

Oppikirja opastaa mallintamiseen ja analyyttiseen ajatteluun, mutta ei ole sitoutunut ongelmakeskeiseen lähestymistapaan [29]. Luvut alkavat johdannolla ja perusteluilla. Harjoitustehtävät on jaoteltu perustehtäviin ja vaativampiin tehtäviin. Lisäksi kirjassa on erikseen lisätehtäviä. Tehtäviin annetaan vastaukset kirjan lopussa.

6. OPPIKIRJA-ANALYYSIN TULOKSET

Tässä luvussa käydään läpi oppikirjojen funktion määritelmät sekä vertaillaan niitä. Sen jälkeen etsitään ja luokitellaan kirjojen kaikki viittaukset funktioon. Oppikirjojen tavasta käsitellä funktion käsitettä pyritään muodostamaan kokonaisvaltainen kuva.

6.1 Funktion määritelmät oppikirjoissa

Oppikirjoista haetaan funktion määritelmät. Useimmissa oppikirjoissa määritelmä on annettu laatikoituna tai sen yhteydessä on muuten ilmaistu selkeästi, että kyseessä on määritelmä. Lukion oppikirjoissa funktion määritelmä erotetaan selkeämmin muusta teoriasta kuin peruskoulun oppikirjoissa.

Funktion määritelmä 1 (Laskutaito)**.** Funktio f on sääntö, jonka mukaan jokaista muuttujan x arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo $f(x)$.

Funktion määritelmä 2 (Kolmio)**.** Suuretta, joka riippuu toisesta suureesta säännönmukaisesti, sanotaan tämän jälkimmäisen suureen funktioksi.

Funktion määritelmä 3 (Pii)**.** Funktio on sääntö, joka liittää jokaiseen muuttujan arvoon yhden tarkalleen määrätyn funktion arvon.

Funktion määritelmä 4 (Pyramidi)**.** Funktio eli kuvaus f joukosta A joukkoon B liittää jokaiseen joukon A alkioon yhden joukon B alkion. Funktion f alkioon x liittämää arvoa merkitään $f(x)$.

Funktion määritelmä 5 (Laudatur)**.** Funktio eli kuvaus f joukosta A joukkoon B tarkoittaa sääntöä, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon yksikäsitteisesti joukon B alkion. Merkitään $f : A \to B$. Joukkoa A sanotaan määrittelyjoukoksi ja joukkoa B maalijoukoksi.

Funktion määritelmä 6 (Calculus)**.** Funktio joukosta A joukkoon B on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon tarkalleen yhden alkion joukosta B.

Peruskoulun Pii-oppikirjassa määritelmää ei ole yksiselitteisesti kerrottu, mutta teoriaosasta valittiin määritelmäksi virke, joka alkaa ”Funktio on...”. Muissa oppikirjoissa määritelmä on annettu selkeästi erottuvasti muusta tekstistä.

Peruskoulun oppikirjat määrittelevät funktion sääntönä. Laskutaidon ja Piin määritelmissä on kuitenkin myös piirteitä vastaavuudesta, vaikka joukoista ei ole mitään mainintaa. Määritelmissä kuitenkin korostetaan, että yhtä muuttujan arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo. Laskutaidossa määritelmä on pyritty laatimaan täsmällisesti, mutta Piissä määritelmä on jätetty muun teoriatekstin sekaan. Kolmion määritelmä on vapaamuotoisempi kuin muissa peruskoulun oppikirjoissa. Kolmiossa funktion määritelmä on suurpiirteinen, ja se on muotoiltu vaikeasti ymmärrettäväksi virkkeeksi. Kolmio erottuu määritelmän osalta muista peruskoulun oppikirjoista enemmän, vaikka se luokitellaan samaan luokkaan kuin muutkin peruskoulun oppikirjat. Erot peruskoulun oppikirjoissa ovat kuitenkin melko vähäisiä.

Laskutaidossa ja Piissä funktion määritellään funktion arvon avulla. Määritelmän ymmärtämisessä siis tarvitaan itse kyseistä määritelmää, jota vasta määritellään. Kun funktio yritetään määritellä ilman joukko-oppia, voidaan joutua tällaisiin käsitteellisiin ongelmiin.

Lukion pitkän matematiikan oppikirjat määrittelevät funktion kuvauksena. Jokaisen kirjan määritelmässä on mainittu joukot ja niiden alkiot. Eroavaisuuksia kirjojen välillä on siinä, mitä merkintätapoja kirjan tekijät ovat pitäneet tärkeänä esitellä määritelmän yhteydessä. Pyramidi ottaa esille funktion arvon, Laudatur funktion merkintätavan ja Calculus ei määritelmässään esittele merkintätapoja. Erot oppikirjojen välillä jäävät kuitenkin pieniksi.

Huomattavaa on, että vaikka lukion oppikirjojen määritelmät voidaan luokitella vastaavuuksiksi tai kuvauksiksi, Pyramidia lukuunottamatta jokaisen oppikirjan määritelmässä funktio on "sääntö, joka liittää...". Vain Pyramidissa esitetään tarkalleen: "funktio eli kuvaus liittää...". Vaikka lukion oppikirjat mainitsevat joukot, niiden funktion määritelmissä on viitteitä funktioon sääntönä.

Peruskoulun ja lukion oppikirjojen välillä suurin ero on lukujoukkojen mainitseminen. Yksikään peruskoulun oppikirja ei mainitse joukkoja funktion määritelmän yhteydessä, kun taas jokaisessa lukion oppikirjassa joukot ovat määritelmässä. Lukion oppikirjoissa funktion määritelmä on matemaattisesti pätevä ja peruskoulun oppikirjoissakin peruskoulutasolle ymmärrettävä, vaikkakin matemaattisesti puutteellinen. Yläkoulun oppikirjoissa olisi parempi puhua funktion käsitteen esittelemisestä eikä määrittelemisestä.

Vaikka funktion määritelmä olisi pätevä, matematiikan kirja kokonaisuudessaan saattaa antaa erilaisen funktiokäsityksen oppilaalle. Samoin pohjatietojen puuttuminen joukko-opista vaikuttaa mahdollisuuteen edes ymmärtää funktiota joukkojen näkökulmasta.

6.2 Oppikirjojen funktiokäsitykset

Oppikirjojen funktioon viittaavat virkkeet on koottu liitteeseen A. Luokittelu ei kuitenkaan ollut kaikissa tapauksissa yksinkertaista, koska saman virkkeen sisällä saattoi olla ajatuksellisesti eri luokkiin kuuluvia viittauksia. Virkkeistä pyrittiin hahmottamaan kokonaisajatus ja luokittelemalla sen mukaisesti. Taulukkoon 6.1 on koottu, mihin luokkiin oppikirjan näkemys funktiosta kokonaisvaikutelma huomioiden voidaan laittaa. Tätä oppikirjan antamaa kokonaisvaikutelmaa funktiosta kutsutaan kirjan yleiseksi *funktiokäsitykseksi*. Samassa taulukossa on erikseen ilmaistu, mihin luokkaan oppikirjan funktion määritelmä kuuluu.

Taulukko 6.1: Oppikirjojen määritelmän ja yleisen funktiokäsityksen luokittelu

Luokka	Laskutaito	Kolmio	Pii	Pyramidi	Laudatur	Calculus
Vastaavuus				määritelmä funktiokäsitys	määritelmä	määritelmä
Riippuvuus						funktiokäsitys
Sääntö	määritelmä funktiokäsitys	määritelmä funktiokäsitys	määritelmä funktiokäsitys		funktiokäsitys	
Kaava						
Operaatio						
Representaatio						

Useimmat oppikirjat pitävät funktiota sääntönä. Vain lukion oppikirjoissa funktio oli määritelty vastaavuutena, ja Pyramidin koko yleinen funktiokäsitys on samanlainen määritelmänsä kanssa. Laudaturia ja Calculusta lukuunottamatta kirjoissa funktion määritelmä edustaa samaa funktiokäsitystä kuin mitä kirja kokonaisuudessaan. Kunkin oppikirjan funktiokäsitys ei ole yksikäsitteinen eli oppikirjoissa on viittauksia myös muihin luokkiin.

Luokissa kaava, operaatio tai representaatio ei ole yhdenkään kirjan yleinen funktiokäsitystä, vaikka jokaisessa oppikirjassa funktio käsitellään lausekkeena ja piirretään kuvaajia. Tutkimuksessa keskitytään funktion määritelmään ja johdattaviin esimerkkeihin, jotka olivat kirjoissa muuta kuin kaava, operaatio tai representaatio. Näiden luokkien asiat käydään läpi kirjoissa hieman myöhemmin, mutta funktiota ei määritellä niiden perusteella. Esimerkiksi funktion eri representaatiot kuuluvat opetussuunnitelmassa opetettaviin asioihin ja kuuluvat siksi jokaiseen oppikirjaan.

Suoraviivaisimmin valitussa funktiokäsityksessä pysyy Pyramidi, jonka funktiokäsitys on myös matemaattisin. Pyramidin koko ensimmäisen alaluvun ensimmäisestä esimerkistä ensimmäisiin harjoitustehtäviin funktio käsitellään kuvauksena. Pyramidissä selitetään funktioon ja joukkoihin liittyvät matemaattiset käsitteet.

Monipuolisin funktiokäsitys annetaan Laudaturissa. Laudaturissa määritellään funktio kuvauksena, mutta johdatellaan aiheeseen riippuvuuden ja säännön avulla. Laudaturin esitystapa on kuitenkin myös hieman sekava, koska mihinkään funktiokäsitykseen ei kirjassa syvennytä. Teoriaosassa on paljon tekstiä ja tietoa, joka hukkuu esimerkkien lomaan. Tekstissä on matemaattisesti olennaiset käsitteet ja asiat sekaisin vähemmän tärkeän johdattelevan tekstiosuuden kanssa, ja kokonaisuutta on vaikea ottaa haltuun.

Laskutaito on niukka teoriaosaltaan ja johdattelua aiheeseen ei ole. Teoria on tiivistetty muutamaan lauseeseen, jotka ovat selkeästi laatikoitu. Funktiota käsitellessä Laskutaidossa esitetään heti toisessa lauseessa funktion matemaattinen merkintätapa ”esimerkiksi $f(x) = 10x + 1$”. Oppikirjassa annetaan vaikutelma, että siinä ohjataan keskittymään mekaaniseen laskemiseen eikä niinkään asioiden syvälliseen ymmärtämiseen. Opettajalle jää vastuu tehdä pedagogiset ratkaisut siitä, kuinka syvällisesti oppilaiden on tarkoitus oppia.

Lukion Calculus on ainoa oppikirja, jonka yleinen funktiokäsitys luokitellaan riippuvuusrelaatioksi. Oppikirjassa riippuvuus korostuu sääntöä enemmän. Erosta huolimatta kirjan sisällöllä on paljon yhteistä sääntö-luokkaan kuuluvien oppikirjojen kanssa. Kirjoissa on samantyyppisiä esimerkkejä sekä riippuvudesta että säännöstä, mutta esimerkkien ja viittausten määrässä on hieman eroa.

Luokat sääntö ja riippuvuus limittyvät useissa kirjoissa toisiinsa ja jako luokkien välillä on häilyvä. Joissain tapauksissa asiasisältönä riippuvuudella ja säännöllä tarkoitetaan samaa, vaikka ne on ilmaistu hieman eri sanoin. Tämän tutkimuksen aineiston pohjalta nämä kaksi luokkaa olisi voinut yhdistää. Tutkimuksessa pitäydytään kuitenkin valitussa teorialähtöisessä tutkimusmenetelmässä ja pidetään luokkajako monitulkintaisuudesta huolimatta ennallaan. Luokiteltaessa lauseet ovat irroitettu osittain asiayhteydestä ja kirjan yleinen funktiokäsitys tulkitaan niiden avulla.

Oppikirjoissa on paljon yhtäläisyyksiä. Pääpiirteittäin peruskoulun oppikirjoissa on vain vähäisiä eroavaisuuksia asiasisällössä, vaikka eri kirjat esittelevät asiat eri tavoin, erilaisin esimerkein ja erilaisin rakentein kuten otsikoinnein tai eri tavalla korostettuna. Myös tekstiä oppikirjoissa on hyvin vaihtelevasti. Laskutaito keskittyy vain tärkeimpien asioiden kertomiseen lyhyesti, kun taas Piissä esimerkkejä ja johdantoa on monen sivun verran. Lukion oppikirjoissa eroavaisuuksia on enemmän, vaikkakin kaikissa tulevat esille ylioppilaskirjoituksissa vaaditut merkinnät ja asiat. Lukion oppikirjojen yleiset funktiokäsitykset poikkeavat toisistaan. Calculuksessa ja Laudaturissa on paljon yhtäläisyyksiä, vaikka yleiset funktiokäsitykset on jaettu eri luokkiin. Pyramidi eroaa lukion kirjoista eniten.

6.2.1 Vastaavuus

Pyramidi käsittelee funktiokäsitettä matemaattisesti kuvauksena ja havainnollistaa kuvausta esimerkillä. Muissakin lukion kirjoissa määritelmä on joukko-opillinen, mutta niiden lähestymistä aiheeseen ei kuitenkaan tehdä joukko-opin kautta. Yleisempiä lukujoukkoja lukuunottamatta joukkoihin ei juurikaan kiinnitetä huomiota.

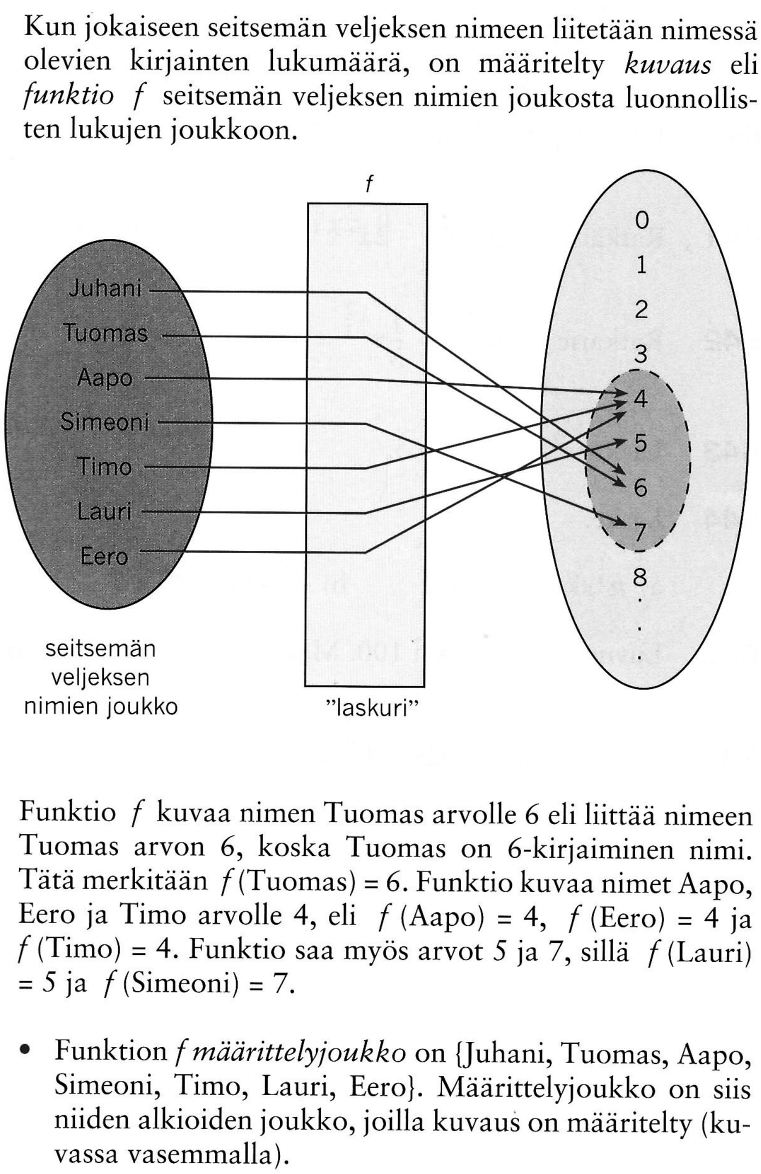
Pyramidi lähtee kuitenkin vahvasti ajatuksesta joukoista ja niiden välisestä kuvauksesta. Oppikirjan mukaan lukion kursseilla tutkitaan pääasiassa reaalifunktioita. Reaalifunktioiksi kutsutaan tässä yhteydessä funktioita $f : A \rightarrow B$, jos A ja B ovat reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukkoja. Lukujoukoista ei funktionkäsittelyn yhteydessä ole muuta tietoa. Oppikirjan ensimmäisessä luvussa on kuitenkin käsitelty lukujoukot, missä on esitelty luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut, irrationaaliluvut ja reaaliluvut sekä mainitaan kompleksilukujen joukko, joka ei sisälly lukion oppimäärään. Funktioon liittyvissä esimerkkitehtävissä korostetaan lähtö- ja maalijoukkojen tunnistamista. Esimerkeissä käytetään pääasiassa pieniä alle kymmenen alkion lähtö- ja maalijoukkoja sekä piirrettyjä joukkoja. Pyramidi opettaa funktion osana joukko-oppia, vaikka varsinaisia joukkojen operaatioita ei käydä läpi.

Pyramidin tarjoama funktiokäsitys voidaan luokitella kuvaukseksi. Pyramidin teoriaosuuden ja esimerkkien perusteella mielikuva funktiosta muodostetaan opiskelijalle nimenomaan kuvauksen avulla. Pyramidi pysyy matemaattisissa tosiasioissa eikä pyri luomaan opiskelijalle mielikuvaa funktiosta muilla keinoin. Pyramidissa ensimmäinen esimerkki, jonka tarkoitus on johdattaa aiheeseen, esittelee funktion heti kuvauksena. Kyseinen esimerkki on kuvassa 6.1.

Laudatur jättää funktion määrittelyn kuvauksena hyvin pieneen rooliin. Laudaturin johdanto aiheeseen on pitkänpuoleinen, mutta funktio on määritelty matemaattisesti yhdellä sivulla, missä on käsitelty myös esimerkiksi funktion yksikäsitteisyys ja samuus. Kirjassa on vain yksi esimerkki, johon joukot liittyvät. Kyseisessä esimerkissä lasketaan kolmen eri funktion arvojoukot, kun määrittelyjoukot on annettu.

Calculus asettuu Pyramidin ja Laudaturin väliin funktion korostamisessa vastaavuutena. Määrittelyjoukon merkitys jää Calculuksessa hieman epäselväksi, sillä hyvin nopeasti lukiossa tutkittavat funktiot todetaan reaalifunktioiksi. Samalla opastetaan, että määrittelyjoukoksi tulkitaan kaikkien niiden reaalilukujen joukko, jotka tuottavat funktiolle reaalisen arvon, mikäli määrittelyjoukkoa ei ilmoiteta.

Pyramidissä joukkojen merkitystä korostetaan enemmän kuin muissa oppikirjoissa, ja Pyramidin ensimmäisessä alaluvussa käsitellään vain funktion määritelmää, tunnistetaan lähtö- ja maalijoukkoja ja pohditaan, mikä on funktio. Ensimmäisen alaluvun jälkeen on tehtäviä. Calculuksessa rakenne on samanlainen kuin Pyramidissa, mutta sisältö esitetään eri tavalla. Laudaturissa sen sijaan käsitellään funktion



Kun jokaiseen seitsemän veljeksen nimeen liitetään nimessä olevien kirjainten lukumäärä, on määritelty *kuvaus* eli *funktio* f seitsemän veljeksen nimien joukosta luonnollisten lukujen joukkoon.

Funktio f kuvaa nimen Tuomas arvolle 6 eli liittää nimeen Tuomas arvon 6, koska Tuomas on 6-kirjaiminen nimi. Tätä merkitään f(Tuomas) = 6. Funktio kuvaa nimet Aapo, Eero ja Timo arvolle 4, eli f (Aapo) = 4, f (Eero) = 4 ja f (Timo) = 4. Funktio saa myös arvot 5 ja 7, sillä f (Lauri) = 5 ja f (Simeoni) = 7.

- Funktion f *määrittelyjoukko* on {Juhani, Tuomas, Aapo, Simeoni, Timo, Lauri, Eero}. Määrittelyjoukko on siis niiden alkioiden joukko, joilla kuvaus on määritelty (kuvassa vasemmalla).

Kuva 6.1: Pyramidin ensimmäinen esimerkki funktiosta [27, s. 114]

määritelmän jälkeen heti funktion kuvaajan piirtäminen ja nollakohtien etsiminen ja vasta näiden jälkeen on harjoitustehtäviä.

6.2.2 Riippuvuusrelaatio

Useissa oppikirjoissa mainitaan funktio riippuvuutena. Kuitenkin vain Calculuksen funktiokäsitys voidaan luokitella riippuvuusrelaatioksi. Calculuksen näkemys on, että funktiota tarvitaan tutkittaessa muuttuvien suureiden välistä riippuvuutta. Kolmiossa, Piissä ja Laudaturissa funktion käsitteeseen johdatellaan riippuvuuden avulla. Laudatur aloittaa liittämällä funktion "*...ilmiöihin, joissa suureen arvo riippuu toisesta suureesta*" [28, s. 106]. Piissä tätä tarkennetaan kertomalla, että "*kaksi suu-*

retta voivat riippua toisistaan siten, että toisen arvo voidaan päätellä tai laskea, kun toisen arvo tunnetaan" [26, s. 6].

Riippuvuutta selvennetään yksinkertaisilla arkipäivästä tutuilla asioilla. Piissä esimerkkinä käytetään, että tuotteesta maksettava hinta riippuu ostettavasta määrästä eli hinta on määrän funktio. Kolmiossa kerrotaan matkaan käytetyn ajan riippuvan nopeudesta eli aika on nopeuden funktio. Laudaturissa kerrotaan esimerkiksi ympyrän pinta-alan riippuvan säteestä. Calculuksessa vastaavia esimerkkejä on useita kuten edellisiin lisäyksenä lämpötila riippuu ajanhetkestä ja koetulos riippuu lukuajasta.

Oppikirjoissa riippuvuuden ajatusta ei kuitenkaan käytetä juuri sen enempää kuin johdatteluun. Kolmiossa ja Piissä lasketaan pari riippuvuuteen liittyvää esimerkkiä, mutta molemmat kirjat keskittyvät sen jälkeen kuvaamaan funktiota sääntönä. Calculuksessa esimerkkejä on hyvin vähän ja esimerkit esittelevät funktiota eri näkökulmista. Oppikirjan kolmannessa esimerkissä funktio kuvataan riippuvuutena.

Esimerkki 3 (Calculus)**.** Yhtälö $y = x^2$ esittää lukujen x ja y välisen riippuvuuden. Koska jokaista x:n arvoa vastaa tarkalleen yksi y:n arvo, niin y on x:n funktio. ... [29, s. 43]

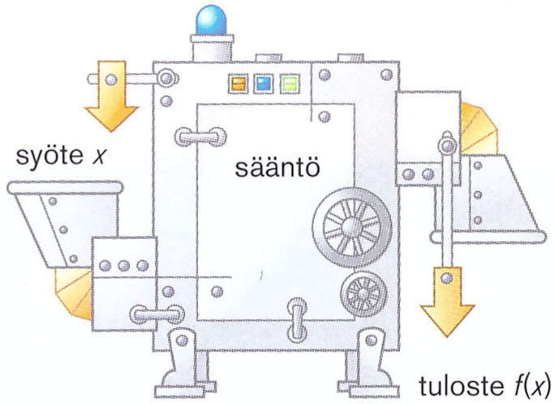
6.2.3 Sääntö

Vaikka Laudaturissa määritellään funktio kuvaukseksi, oppikirja antaa muuten erilaisen kuvan funktiosta. Laudaturissa funktion matemaattinen määritelmä kuvauksena ja sen käsittely jäävät hyvin lyhyeksi ja edetään funktion kuvaajan piirtämiseen. Funktiokäsitteelle ei ole omaa tehtäväosiota vaan ensimmäisiin harjoitustehtäviin liittyy jo funktion kuvaajaan liittyvät tehtävät.

Kokonaiskuvaa muodostaessa Laudatur määrittelee funktion olevan sääntö, joka kuvaa asioiden välistä riippuvuussuhdetta. Oppikirjassa kerrotaan, että sääntöä ei voida aina ilmaista matemaattisesti, mutta oleellista on se, että säännön avulla pystytään päättelemään funktion arvo. Samassa yhteydessä määritellään muuttuja, funktion arvo ja määrittelyjoukko sekä esitellään merkintätapoja. Esimerkeissä määrittelyjoukot ovat kokonaislukujen joukko tai koko reaalilukujen joukko. Lukujoukot on esitelty oppikirjan ensimmäisessä luvussa.

Jokainen tutkimuksessa mukana oleva peruskoulun oppikirja pitää funktiota sääntönä, joka kuvaa riippuvuutta. Kolmion mukaan funktio kuvaa "kahden suureen välistä säännönmukaista riippuvuutta" [25, s. 190]. Funktiota käytetään yläkoulun matematiikassa nimenomaan kuvaamaan säännönmukaista riippuvuutta. Säännönmukaiseen riippuvuuteen on helposti liitettävissä lineaarinen funktio ja sen soveltaminen erilaisissa tehtävissä ja riippuvuuden tarkasteluissa, mihin oppikirjoissa keskitytäänkin.

Peruskoulun oppikirjat sekä lukion Laudatur tuo esille funktion sääntönä ja esittelevät esimerkkinä ”funktiokoneen”. Funktiokone toimii siten, että syötettäessä koneeseen jokin luku, koneesta tulee ulos toinen luku. Tämä tulostuva luku määräytyy jonkin säännön eli funktion mukaan. Funktiokone-esimerkeissä tehtävänä on ilmoittaa funktiokoneen sääntö yhtälönä (Kolmio) tai lausekkeena (Laskutaito).



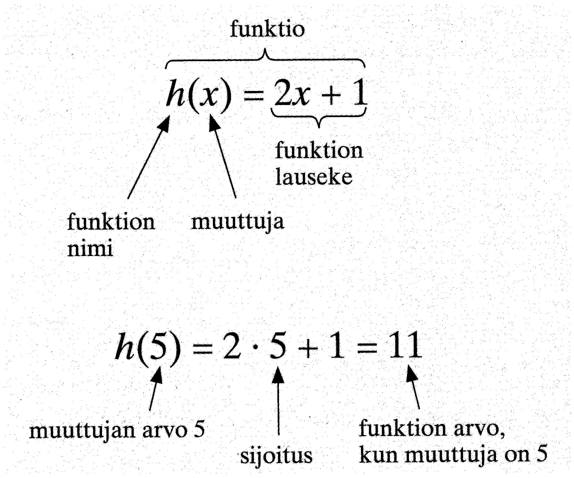
Kuva 6.2: Funktiokone Laskutaidossa [24, s. 62]

Funktiokone on hyvin yksinkertaistettu malli funktiosta, mutta sopii johdattelevaan rooliin peruskoulun matematiikassa. Funktiokone itsessään ei ole matematiikkaa vaan pikemminkin se on funktion havainnollistamisen apukeino. Funktiokone korostuu kuitenkin esimerkiksi Piissä. Piissä funktiokone on saanut oman otsikon ja nimitystä ”funktiokone” käsitellään samoin kuin matematiikan käsitteitä esimerkiksi lihavoituna tekstissä. Tällöin matematiikan ja matematiikan opetuksen avuksi otetut käsitteet voivat mennä oppilailla sekaisin.

6.2.4 Kaava

Vain Laskutaidossa ja Piissä sanotaan suoraan, että funktio voidaan määrittää lausekkeella. Laskutaidossa ei ole paljon tekstiä, joten lause ”*funktio määritellään usein antamalla funktion lauseke* $f(x)$ [24, s. 62]” nousee vallitsevaksi ohjeeksi funktion määrittelemiseksi. Tällöin funktion käsite ohitetaan ja keskitytään proseduraaliseen laskemiseen.

Piissä ja Laudaturissa funktion määrittelevä lauseke on vain nimetty. Calculuksessa funktiota ei määritellä lausekkeena. Myöskään Pyramidi ei asiatekstissä määrittele funktiota lausekkeena. Pyramidin esimerkkitehtävässä pyydetään määrittelemään esimerkkitehtävän kuvan reaalifunktio lausekkeen avulla. Pyramidi siis esittelee tavan määritellä funktio lausekkeena, mutta ei pidä sitä ainoana tapana. Myös Laudatur pitää funktion lauseketta yhtenä mahdollisuutena määritellä funktio: ”*Jos* *suureen arvo saadaan matemaattisten laskutoimitusten avulla laskettua toisesta suureesta, tätä laskusääntöä kutsutaan funktion lausekkeeksi.*[28, s. 107]"



Kuva 6.3: Merkintätapoja Laudaturissa [28, s. 108]

Kaikissa oppikirjoissa esitetään funktio lausekkeena, mutta Laskutaitoa lukuunottamatta oppikirjoissa lauseke liittyy tilanteeseen, jossa suureen arvo saadaan laskutoimitusten avulla laskettua toisesta suureesta eikä lauseketta yleistetä määrittelemään kaikkia funktioita. Funktion kuvaaminen lausekkeena on vain yksi osa funktion käsitettä eikä sellaisenaan ole matemaattisesti pätevä. Peruskoulun ja lukion matematiikassa funktioita käsitellään nimenomaan lausekkeiden avulla, mutta oppikirjoissa pyritään lähestymään funktiota kokonaisvaltaisesti. Laskutaidossa edetään suoraviivaisimmin funktion määrittelemiseen lausekkeen avulla.

6.2.5 Operaatio

Operaatiolla tarkoitetaan tässä yhteydessä toimenpidettä, jolla annetuista arvoista saadaan tietyin edellytyksin muut arvot eli funktion arvot. Tämä operaatio eli toimenpide on tavallisesti algebrallinen laskutoimitus, joka on esitetty lausekkeena. Operaatio voidaan ymmärtää läheiseksi säännön kanssa sisältämättä ajatusta riippuvuudesta.

Oppikirjat eivät varsinaisesti tuo esille funktiota operaationa. Funktion arvon laskeminen voidaan joskus luokitella operaatioksi riippuen siitä, miten funktion arvon laskeminen oppikirjassa on esitetty. Laskutaidossa, Piissä ja Kolmiossa funktion arvon laskeminen esitellään operaationa, vaikkei operaatio-käsitettä suoraan käytetä. Esimerkiksi Laskutaidossa kerrotaan, että "*funktion arvo saadaan sijoittamalla funktion lausekkeeseen $f(x)$ muuttujan x paikalle luku* [24, s. 64]".

Lukion oppikirjoissa ei ole viittauksia funktioon operaationa. Funktion arvo on laajempi käsite kuin, että se saadaan laskutoimituksen eli jonkin operaation avulla.

Vinnerin ja Dreyfusin tutkimuksessa funktiota määritettiin operaationa selvästi vähiten [5]. Analysoitujen oppikirjojen osalta vaikuttaa samalta. Yläkoulun oppikirjoissa annetaan yksityiskohtaisemmat laskuohjeet esimerkiksi funktion arvon laskemiselle, mutta lukion oppikirjoissa ne oletetaan jo osatuksi.

6.2.6 Representaatio eli esitystapa

Funktion määrittelyä representaatiolla tarkoittaa tässä yhteydessä sitä, että funktio määritellään sen yhdellä esitystavalla. Tämä esitystapa voi olla verbaalinen, visuaalinen, numeerinen tai algebrallinen, mutta useimmiten visuaalinen eli graafinen tai algebrallinen eli symbolinen. Jokaisessa oppikirjassa esitellään vähintään graafinen ja symbolinen esitystapa, mutta oppikirjoissa esimerkkitehtävissä funktio määritellään useimmiten symbolisen esityksen avulla ja graafista tai numeerista esitystapaa käytetään apuna.

Oppikirjoissa funktiosta esitellään ensimmäisenä symbolinen esitystapa. Symbolisesta esitystavasta siirrytään graafiseen esitystapaan eli funktion kuvaajiin. Kun funktion kuvaajien piirtäminen käydään läpi, käytetään apuna funktion numeerista eli taulukoitua esitystapaa. Taulukossa on esitetty muuttujan arvot ja niitä vastaavat funktion arvot. Taulukossa olevat lukuparit eivät välttämättä yksistään riitä määrittelemään funktiota. Taulukoituja arvoja käytetään piirtämisen apuna, kun esimerkiksi tiedetään funktion olevan lineaarinen. Tällöin taulukoitujen arvojen avulla voidaan määrittää funktion lauseke. Tällainen esimerkki on esitetty Laudaturissa.

Funktion kuvaaja on useimmiten oppikirjoissa vain apuna esimerkiksi funktion suurimman ja pienimmän arvon arvioimiseen, funktion nollakohdan etsintään ja funktion arvojoukon etsintään. Funktion kuvaajan avulla ei oppikirjoissa pyritä määrittelemään funktiota. Esimerkiksi Pyramidissa kerrotaan, että ”*reaalifunktiosta voidaan piirtää koordinaatistoon kuvaaja* [27, s. 121]” (Pyramidi).

Eri oppikirjoissa funktion esitystavat on esitetty eri tavoin. Kolmiossa nostetaan tärkeäksi asiaksi symbolisen esityksen merkintatavat. Merkintätavat eivät kuitenkaan ole selkeitä ja niitä käytetään epäjohdonmukaisesti. Kolmiossa esitellään merkintä $y = f(x)$, missä y on funktion arvo, f on funktio ja x on muuttuja. Tämän jälkeen joissakin esimerkkitehtävissä funktio on nimetty kirjaimella y, mitä tuetaan sivun laidassa huomautuksella ”*sama funktio voidaan merkitä kahdella eri tavalla:* $y = x - 3$ *tai* $f(x) = x - 3$ [25, s. 192]”. Tämän jälkeen oppikirjassa käytetään ristiin käsitteitä funktio ja suora merkiten molempia kirjaimella y. Oppikirjasta jää ristiriitainen käsitys funktiosta, mitä ei helpota käsitteiden ja merkintätapojen samankaltaisuus käsiteltäessä funktiota ja suoraa.

Laskutaidossa esitellään erilaisia lineaarisia ja epälineaarisia funktioita ja harjoitellaan funktioiden kuvaajien tulkintaa ennen lineaarisen funktion kuvaajan piirtämisen harjoittelua. Kuvaajien tulkintaa harjoitellaan esimerkiksi lämpötilakäyrillä.

Laskutaidossa painotetaan kuvaajien tulkintaa päinvastoin kuin Kolmiossa, jossa yhden funktion kuvaajan tulkintaa käsittelevän esimerkin jälkeen siirrytään suoraan suoran piirtämiseen.

Piin rakenne poikkeaa muista yläkoulun oppikirjoista. Piissä funktion jälkeen käsitellään riippuvuutta koordinaatistossa, suoran yhtälöä, verrannollisuutta ja vasta näiden jälkeen funktion kuvaajien piirtämistä ja tulkintaa.

Lukion oppikirjat antavan yläkoulun oppikirjoja monipuolisemman kuvan erilaisten funktioiden kuvaajista. Lukiolaisille esimerkiksi lineaarinen funktio ja funktion kuvaaja ovat tuttuja käsitteitä eikä niitä tarvitse käsitellä samalla tarkkuudella kuin yläkoulussa vaan voidaan siirtyä suoraan vaikeampiin asioihin. Lukiossa keskitytään erilaisiin funktioihin ja funktiotyyppeihin.

Verbaalista eli sanoin kuvattua funktion määrittelyä ei lukion oppikirjoissa esiinny. Yläkoulun oppikirjoissa on niin kutsuttuun funktiokoneeseen liittyvissä esimerkeissä määritetty myös sanallisesti funktio, jonka mukaisesti funktiokone antaa tuloksen. Seuraava esimerkki olisi käsitteiltään matemaattinen, jos ”funktiokoneen” tilalla olisi sana ”funktio” ja sanan ”syöte” tilalla ”muuttuja”.

Esimerkki 4 (Laskutaito)**.** Funktiokone kertoo syötteen luvulla 10 ja lisää tuloon luvun 1. [24, s. 62]

Yleisin funktion esitystapa on algebrallinen eli symbolinen. Symbolinen tapa esitellään ja sitä käytetään jokaisessa oppikirjassa. Graafista esitystapaa pidetään apuna ratkaistaessa esimerkiksi funktion suurinta ja pienintä arvoa ja nollakohtia tai tutkittaessa funktion kulkua. Numeerinen taulukoitu esitystapa esitellään yläkoulun oppikirjoissa, mutta sitä käytetään vain lineaarisen funktion tapauksessa tai hahmottaessa funktion kulkua. Verbaalinen eli sanallinen esitystapa jää erittäin vähäiseksi kaikissa oppikirjoissa, mutta etenkin lukion oppikirjoista se puuttuu kokonaan.

7. KYSELYTUTKIMUS MATEMATIIKAN OPETTAJILLE

Matematiikan opettajien opetuksen suunnittelun lähtökohtia ja funktiokäsitystä tutkitaan opettajille suunnatun kyselytutkimuksen avulla. Kyselytutkimus pohjautuu oppikirja-analyysille. Kyselytutkimuksen mittarit muodostetaan teoreettisen viitekehyksen ja oppikirja-analyysin avulla. Tässä luvussa esitellään tilastolliset tutkimusmenetelmät ja tutkimuksen toteutus.

Määrällisessä eli kvantitatiivisessa tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita syy- ja seuraussuhteista, vertailusta ja laskennallisten ja tilastollisten analyysimenetelmien avulla saaduista tuloksista. Määrällisen tutkimuksen keskeisiä piirteitä ovat aiempiin teorioihin tukeutuminen, hypoteesien esittäminen, otannan tarkka määrittely ja tilastollisten menetelmien käyttö. Määrällistä tutkimusta pidetään objektiivisena verrattuna subjektiiviseen laadulliseen tutkimukseen. [22]

Tutkimusprosessi etenee teorian rakentamisesta teorian testaamiseen. Teorian pohjalta muodostetaan hypoteesit, joille rakennetaan sopivat mittarit. Mittareiden avulla kerätään empiirinen aineisto, joka analysoidaan tilastollisin menetelmin. Analyysin pohjalta tehdään päätelmät siitä, kuinka hyvin tulokset tukevat teoriaa.

Matematiikan opettajille suunnattu kyselytutkimus pyrkii vastaamaan tutkimuskysymyksiin 3-5.

7.1 Tutkimusmenetelmät

Tutkimusmenetelmänä käytetään tilastollisia mentelmiä. Tässä luvussa esitellään aineiston analysoinnin taustalla olevia tilastomatematiikan peruskäsitteitä ja tilastollista testausta.

Esiteltävät menetelmät ovat peräisin useasta lähteestä. Pääasiallisena lähteenä luvussa on käytetty Miltonin [30] ja Metsämuurosen [31] teoksia. Tämän lisäksi on käytetty Tampereen yliopiston menetelmäopetuksen tietovarantoa [32].

7.1.1 Mittaaminen

Tilastoyksikkö, perusjoukko ja otos: *Tilastoyksikkö* on se tilastollinen perusyksikkö, jota tilastointi koskee. Tilastoyksiköstä kerätään tietoa eli mitataan jotakin tutkittavaa ominaisuutta. Tilastoyksikkö voi olla esimerkiksi ihminen, yritys, organisaatio, kunta tai jokin tapahtuma.

Koko tilastoyksiköiden joukko muodostaa tutkimuksen *perusjoukon* eli *populaation*. Perusjoukko on tutkimuksen kohdejoukko, josta tutkimuksessa halutaan tehdä päätelmiä. Kokonaistutkimuksessa kerätään tietoa kaikista perusjoukkoon kuuluvista tilastoyksiköistä. Käytännössä tämä on mahdotonta perusjoukon ollessa hyvin suuri esimerkiksi Suomen kansalaiset.

Kun tutkimuksessa ei ole mahdollista kerätä tietoa kaikilta perusjoukkoon kuuluvilta tilastoyksiköiltä, valitaan tutkimukseen perusjoukkoa edustava *otos*. Perusjoukkoa edustavan otoksen avulla tutkimustulokset voidaan yleistää koskemaan koko perusjoukkoa. Otanta voidaan valita satunnaisesti tai ei-satunnaisesti. Satunnaisotannassa valitaan otoksen koko ja muodostetaan otos satunnaisesti valituista tilastoyksiköistä. Kun ei ole mahdollista ottaa otokseen suurta määrää tilastoyksiköitä, voidaan otanta tehdä esimerkiksi saavutettavuuden perusteella tai jakamalla perusjoukko ryhmiin jonkin ominaisuuden suhteen ja parantaa näin tutkimuksen kannalta tärkeän muuttujan edustavuutta otoksessa. Mikäli otanta ei ole satunnainen ja tutkija on valinnut tutkittavat tilastoyksiköt tutkimukselle ja perusjoukolle sopivalla tavalla, ei voida olettaa, että valitut tilastoyksiköt edustavat perusjoukkoa.

Muuttuja ja havaintomatriisi: Tilastoyksikköön liittyvästä ominaisuudesta kerättyä tietoa kutsutaan *muuttujaksi*. Muuttujia voivat olla esimerkiksi sukupuoli, ikä tai mielipide, kun tilastoyksikkönä on henkilö. Kun aineistoa on tarkoitus käsitellä tilastollisin menetelmin, muuttujaa kuvataan luvulla, joka on muuttujan *(havainto)arvo*. Tietoja käsitellessä voidaan esimerkiksi päättää, että sukupuoli-muuttuja voi saada arvoja 1 ja 2, joista 1 tarkoittaa miestä ja 2 naista.

Tilastoyksikköjä koskevat tiedot kootaan *havaintomatriisiksi*. Havaintomatriisin vaakariveillä ovat yhden tilastoyksikön saamat muuttujien arvot eli yhdeltä tilastoyksiköltä kerätyt tiedot eli havaintoarvot. Tietyn muuttujan arvot ovat sijoitettu yhteen pystysarakkeeseen.

Muuttujien ominaisuudet: Tilastollisen muuttujan havaintoarvot saadaan joltakin *mitta-asteikolta*. Mitta-asteikon avulla määritetään, millä tasolla muuttuja määrittelee tilastoyksiköiden väliset erot. Mitta-asteikon valintaan vaikuttaa kerättävän tiedon luonne ja millä menetelmillä saatua tietoa on tarkoitus käsitellä. Tilastollisilla menetelmillä on mitta-asteikkovaatimuksia. Yleisesti käytettyjä mitta-asteikoita on neljä erilaista: luokitteluasteikko, järjestysasteikko, välimatka-asteikko ja suhdeasteikko.

Luokitteluasteikko: Luokitteluasteikosta käytetään myös nimiä laatueroasteikko ja nominaaliasteikko. Luokitteluasteikolla voidaan luokitella tilastoyksiköitä sellaisen muuttujan suhteen, joka kuvaa laatua. Muuttujan arvoja ei voi järjestää yksiselitteisesti suuruusjärjesteykseen. Luokitteluasteikolla mitattava muuttuja voi olla esimerkiksi sukupuoli tai kansalaisuus.

Järjestysasteikko: Järjestysasteikosta käytetään myös nimeä ordinaaliasteikko. Järjestysasteikko asettaa muuttujan arvot järjestykseen, muttei sisällä tarkkaa mittayksikköä välimatkojen mittaamiseen. Esimerkiksi mielipidettä mittaava Likert-asteikko ”täysin eri mieltä - jokseenkin eri mieltä - jokseenkin samaa mieltä - täysin samaa mieltä” on järjestysasteikko.

Välimatka-asteikko: Välimatka- eli intervalliasteikolla muuttujan arvot ovat säännöllisen välimatkan päässä toisistaan. Kun asteikolla liikutaan mittayksikön verran, siirrytään aina yhtä pitkä matka. Välimatka-asteikolla voidaan laskea keskiarvo. Esimerkiksi lämpötilaa voidaan mitata välimatka-asteikolla.

Suhdeasteikko: Suhdeasteikolla on samat ominaisuudet kuin välimatka-asteikolla, mutta niiden lisäksi suhdeasteikolla on todellinen eli absoluuttinen nollapiste, jossa mitattavaa ominaisuutta ei esiinny lainkaan. Suhdeasteikolla voidaan ilmoittaa tarkasti muuttujan arvojen suuruus suhteessa toisiinsa, koska asteikon nollapiste on todellinen. Esimerkiksi pituus, paino ja tulot voidaan mitata suhdeasteikolla.

Kun aineistoa käsitellään tietokoneella ja muodostetaan havaintomatriisi, muuttujan havaintoarvot koodataan numeroilla tai luvuilla huolimatta muuttujan mitta-asteikosta. Numerokoodaus tehdään tiedon käsittelyn yksinkertaistamiseksi. Kuitenkin esimerkiksi luokitteluasteikon havaintomatriisiin koodatuille numeroille ei voida käyttää samanlaisia tilastollisia menetelmiä kuin välimatka- tai suhdeasteikon numeerisilla muuttujan arvoilla.

Mittarin luotettavuus: Tutkimuksen luotettavuus on suoraan verrannollinen mittarin luotettavuuteen. Mittarin luotettavuutta kuvataan käsitteillä *validiteetti* ja *reliabiliteetti*. Mittarin validiteetti on hyvä, jos mittari mittaa sitä, mitä sen on tarkoituskin mitata. Mittarin reliabiliteetti kuvaa mittaustulosten toistettavuutta.

Tutkimuksen tarkoitus on ilmaistu tutkimuskysymyksinä. Tutkimuskysymyksiin liittyy mitattavia käsitteitä. Mittaria on käytettävä oikeaan kohteeseen oikealla tavalla. Validiteetti kuvaa mittarin kykyä mitata juuri sitä ominaisuutta, mitä on tarkoitus mitata. Käytettävät menetelmät on valittava sen mukaan, millaista tietoa halutaan. Validiteetti voidaan jakaa esimerkiksi sisäiseen ja ulkoiseen validiteettiin. *Ulkoinen validiteetti* kuvaa tutkimuksen yleistettävyyttä. Tutkimuksen yleistettävyyteen vaikuttaa tutkimusasetelma ja mihin ryhmiin tutkimustulokset ovat yleistettävissä vaikuttaa otanta. *Sisäinen validiteetti* kuvaa, onko mittarissa käytetyt käsitteet teorian mukaiset ja kattavatko käsitteet riittävän laajasti tutkittavan ilmiön. Sisäisessä validiteetissa tarkastellaan mittarin muodostamista ja mittaustilanteen vaikutusta tutkimuksen luotettavuuteen. Tutkimuksen validiteettia voidaan parantaa hyvällä tutkimusasetelmalla, oikealla käsitteenmuodostuksella ja teoreettisen viitekehyksen luonnilla sekä tarkoituksenmukaisella otannalla.

Tutkimuksen reliabiliteetilla kuvataan tutkimuksen toistettavuutta. Mittari on reliaabeli, jos samaa ilmiötä tutkittaessa samalla mittarilla samoilla menetelmillä saadaan eri mittauskerroilla samat tulokset. Reliaabeliin mittariin eivät vaikuta satunnaisvirheet tai olosuhteet.

Reliabiliteettia voidaan käsitellä kolmella eri osatekijällä. Rinnakkaismittauksessa mittaus toteutetaan samaan aikaan eri mittarilla ja vastataan kysymykseen, vastaako useammat mittarit samaan ongelmaan. Toistomittauksessa mitataan eri aikaan samalla mittarilla. Toistomittauksissa saadaan testattua mittarin herkkyys ulkopuolisille tekijöille. Tutkimuksen aiheesta riippuen on pohdittava, miten mittauksien välinen aika otetaan huomioon. Mittarin sisäistä konsistenssia eli yhtenäisyyttä mitataan samaan aikaan samalla mittarilla. Konsistenssilla tarkoitetaan mittarin eri osioiden kykyä mitata samaa asiaa. Periaatteessa tutkimus voi olla reaabeli ja tuottaa johdonmukaisia tuloksia, vaikka tutkimus ei olisikaan validi eli pätevä.

Reliabiliteettia voidaan mitata reliabiliteettikertoimella eli Cronbachin alfalla. Alfan laskeminen perustuu yhteenlaskettavien muuttujien jakamiseen kahteen osaan (Split half). Jos molemmat osat korreloivat voimakkaasti, ovat muuttujat yhtäläisiä. Jos kaikki yhdistettävät muuttujat mittaavat todella samaa asiaa, ei ole väliä, miten muuttujat jakaa kahteen osaan. Cronbachin alfa saadaan

$$\alpha = \frac{k \cdot \bar{r}}{1 + (k-1)\bar{r}}$$

missä k on yhdistettävien muuttujien lukumäärä ja $\bar{r}$ on yhdistettävien muuttujien välisten korrelaatioiden keskiarvo.

Alfa saa arvoja välillä $[0, 1]$. Metsämuuronen [31] suosittelee alimmaksi hyväksytyksi alfan arvoksi 0,60.

7.1.2 Aineiston kuvaaminen

Tilastollista aineistoa voidaan kuvata tunnuslukujen avulla. Yksinkertainen tapa kuvata muuttujia on laskea muuttujan arvojen esiintymisten lukumäärä. Tätä kutsutaan *frekvenssiksi.* Frekvenssi voidaan esittää lukumääränä tai suhteellisena prosenttiosuutena koko aineistosta. Frekvenssiä voidaan havainnollistaa histogrammilla eli pylväsdiagrammilla tai ympyrädiagrammilla. Histogrammin luomiseksi aineistoa tiivistetään niin, että se luokitellaan sopivan kokoisiin luokkiin.

Keski- ja hajontaluvut: Aineistoa voidaan tiivistää laskemalla siitä keski- ja hajontalukuja. Keskiluvut kuvaavat muuttujien havaintoarvojen keskimääräistä suuruutta ja hajontaluvut, kuinka paljon havaintoarvot vaihtelevat. Käytettävä keskiluku valitaan sen mukaan, mitä mitta-asteikkoa on käytetty havaintoarvojen keräämisessä.

Muuttujan *moodi* eli tyyppiarvo kertoo sen muuttujan arvon, jonka frekvenssi aineistossa on suurin. Muuttujalla voi olla usea eri moodi, mikäli kahden tai useamman muuttujan arvon frekvenssit ovat yhtä suuria. Moodi voidaan laskea kaikille aineistolle riippumatta mitta-asteikon valinnasta.

Mediaani (Md) on suuruusjärjestykseen asetetuista muuttujan arvoista keskimmäinen. Mediaania suurempia ja pienempiä arvoja on kumpiakin 50 % aineistosta. Mediaania ei voida laskea luokitteluasteikolla mitatuille muuttujille.

(Otos)keskiarvo kuvaa keskimääräistä havaintoarvoa aineistossa.Keskiarvo saadaan laskemalla muuttujan arvot yhteen ja jakamalla summa arvojen lukumäärällä. Keskiarvo voidaan laskea, kun muuttuja on mitattu välimatka- tai suhdeasteikolla.

Hajontaluvut kuvaavat muuttujan jakaumaa. Keskilukuja vertailemalla ei nähdä kahden aineiston välistä eroa ja sen vuoksi käytetään keskilukujen lisäksi hajontalukuja. Hajonta kuvaa muuttujan havaintoarvojen keskimääräistä poikkeamaa keskiluvusta. Samoin kuin keskiluvuilla muuttujan mitta-asteikko vaikuttaa sopivan hajontaluvun valintaan. Tilastotieteessä käytetyintä hajontalukua, *keskihajontaa*, voidaan käyttää välimatka- ja suhdeasteikolla mitattujen havaintoarvojen hajonnan kuvaamiseen.

Otoskeskihajonta s saadaan varianssin s^2 neliöjuurena

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_1 - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Keskihajontaa ei voida laskea järjestysasteikolla mitatun muuttujan havaintoarvoille. Tällöin voidaan käyttää hajontaa kuvaamaan *vaihteluväliä*. Vaihteluväli ilmoittaa pienimmän ja suurimman havaintoarvon välin.

Summamuuttuja: *Summamuuttujaksi* kutsutaan muuttujaa, jonka arvot on saatu laskemalla yhteen useiden erillisten samaa ilmiötä mittaavien muuttujien havaintoarvot. Yhteenlaskettavat muuttujat ovat mitattu järjestysasteikolla, esimerkiksi Likert-asteikolla. Summamuuttujaa käytetään asenneväittämien yhdistämiseen. Samassa kyselytutkimuksessa voidaan kysyä samaa tarkoittavaa asiaa useilla yksittäisillä väittämillä.

Esimerkkiaineiston järjestyasteikko on koodattu 1 = ei lainkaan tärkeä, 2 = hieman tärkeä, 3 = jonkin verran tärkeä, 4 = melko tärkeä ja 5 = erittäin tärkeä. Neljä väittämää tarkoittavat samaa. Summamuuttuja muodostetaan laskemalla yhteen vastaajan jokaisen väittämän lukuarvo. Esimerkissä summamuuttujan arvo voi vaihdella välillä $[4, 20]$.

Aineisto ei ole aina täydellinen vaan joukosta saattaa puuttua havaintoarvoja. Puuttuvat havaintoarvot ovat koodattu esimerkissä 0 = puuttuva arvo. Tällöin summamuuttuja ei kerro todellista summaa ja eri vastaajien summamuuttujien arvot eivät ole vertailukelpoisia. Siksi summamuuttujan arvot voidaan palauttaa alkuperäisen asteikolle $[1, 5]$ jakamalla summamuuttujan arvo mukaan laskettujen muuttujien lukumäärällä ja pyöristämällä tämä kokonaislukuihin.

Taulukko 7.1: Esimerkkiaineisto summamuuttujan luomisesta

Vastaaja	Väittämä 1	Väittämä 2	Väittämä 3	Väittämä 4	Summamuuttuja asteikolla [4,20]	Summamuuttuja asteikolla [1,5]
Nro 1	1 ei lainkaan tärkeä	1 ei lainkaan tärkeä	1 ei lainkaan tärkeä	1 ei lainkaan tärkeä	4	1 ei lainkaan tärkeä
Nro 2	4 melko tärkeä	5 erittäin tärkeä	4 melko tärkeä	3 jonkin verran tärkeä	16	4 melko tärkeä
Nro 3	3 jonkin verran tärkeä	0 puuttuva arvo	2 hieman tärkeä	2 hieman tärkeä	puuttuu	2 hieman tärkeä

Summamuuttujan avulla tiivistetystä aineistosta voidaan tarkastella frekvenssiä ja havainnollistaa graafisilla esityksillä. Summamuuttujaa voidaan käyttää tilastollisissa menetelmissä kuin tavallista muuttujaa.

7.1.3 Tilastollinen testaus

Aineiston kuvaamisella pyritään saamaan hyvä yleiskuva mitatusta aineistosta. Tilastollisen päättelyn avulla pyritään tekemään johtopäätöksiä aineistosta ja saamaan vastauksia ennalta asetettuihin tutkimuskysymyksiin. Tilastollisessa testauksessa esitetään väitteitä ja testataan niiden sopivuutta tutkimusaineiston havaintoihin. Tilastollisia menetelmiä valitessa tulee tuntea aineisto ja sen jakautuminen, jotta voidaan valita aineistoon sopivat menetelmät. Tilastolliseen testaukseen liittyvä osio perustuu Miltonin [30] ja Nummenmaan [33] teoksiin.

Tilastollinen testaaminen perustuu *nollahypoteesin* H_0 asettamiseen ja sen vertaamiseen tutkimusaineiston havaintoihin. Nollahypoteesiksi asetetaan väite, joka tutkimuksesta riippuen pyritään joko hyväksymään tai hylkäämään. Yleensä nollahypoteesi väittää, että testattavien asioiden välillä ei ole yhteyttä tai eroa. Nollahypoteesi voisi olla esimerkiksi ”Luokkataso ei vaikuta funktion käsitteen opettamiseen.” *Vastahypoteesi* H_1 on nollahypoteesin vastakohta, ja se olisi edellisessä esimerkissä ”Luokkataso vaikuttaa funktion käsitteen opettamiseen.”

Testauksen periaate on laskea ilmiötä kuvaava testisuure sopivaksi todetun menetelmän (testin) avulla. Todennäköisyyttä, että testisuure T saisi suuremman arvon kuin mikä on otoksen perusteella saatu havaittu arvo t_{hav}, kutsutaan *p-arvoksi*

$$\text{p-arvo} = P(T > t_{hav}).$$

Hypoteesin väitteen tilastollinen merkitsevyys määritellään *riskitason* eli merkitsevyystason avulla. Riskitaso kuvaa todennäköisyyttä virheelliselle nollahypoteesin hylkäämiselle. Yleisesti käytössä ovat riskitasot $0,1\%, 1\%$ ja 5%. Ihmisten käytöstä ja toimintaa koskevissa tutkimuksissa riskitaso 5% riittää hyvin. Tilastollisesti merkitsevästä tuloksesta voidaan puhua silloin, kun nollahypoteesi on hylätty.

Jakaumat: Tilastotieteessä käytetään erilaisia jakaumia kuvaamaan otoksen jakautumista. Jakaumien avulla aineistolle saadaan todennäköisyysjakauma, joka kuvaa muuttujan arvojen esiintymistodennäköisyyttä. Testaaminen tapahtuu useimmiten vertaamalla mitattuja muuttujia *satunnaismuuttujan* todennäköisyysjakaumaan. Tilastollinen testi kertoo sopiiko mitattu muuttuja todennäköisyysjakaumaan.

Normaalijakauma on tärkein todennäköisyysjakauma. Valitessa sopivaa testiä hypoteesin testaamiseksi tulee erityisesti tietää, onko aineisto normaalijakautunut, sillä jotkin testit olettavat muuttujilta normaalijakautuneisuutta.

Jakauman sopivuutta normaalijakaumaan voidaan testata *Kolmogorovin-Smirnovin yhden otoksen testillä.* Testin lähtökohtana on laskea otoksen ja normaalijakauman kumulatiivisten suhteellisten frekvenssijakaumien suurinta erotusta. Saatu suurin erotus D on testisuure, jonka avulla testataan otoksen sopivuutta jakaumaan. Normaalijakauman laskemiseen tarvitaan keskiarvoa ja varianssia. Mikäli näitä ei määrätä ennalta vaan käytetään otoksesta laskettuja arvoja, kutsutaan testiä *Kolmogorov-Smirnov-Lillieforsin testiksi* eli *Lillieforsin testiksi.*

Lillieforsin testin testisuureen D kriittiset arvot otoskoolla N ja riskitasolla 0,01 lasketaan [34]

$$D = \frac{1,031}{\sqrt{N}}.$$

Jos laskettu testisuure on pienempi kuin kriittinen arvo, päätellään, että otos ei eroa merkitsevästi normaalijakaumasta. Vastaavasti testisuureen ollessa suurempi kuin kriittinen arvo, otosta ei voida olettaa normaalijakautuneeksi.

Testit: Hypoteesin testaamiseen on parametrisiä ja parametrittomia testejä. Parametriset testit vaativat perusjoukon noudattavan tiettyä todennäköisyysjakaumaa. Parametriset testit ovat tehokkaampia kuin parametrittomat. Tunnettuja parametrisia testejä ovat *t-testi*, jossa oletetaan perusjoukon olevan normaalijakautunut, ja χ^2-

testi, jossa oletetaan perusjoukon noudattavan χ^2-jakaumaa. Parametrittomia testejä voidaan useimmiten käyttää, jos otoskoko on pieni (alle 30) ja aineistoa ei voida pitää normaalijakautuneena. Parametriton testi kahdelle muuttujalle on esimerkiksi Mann-Whitney-testi ja useammalle vertailtavalle ryhmälle Kruskal-Wallis-testi. Sekä Mann-Whitney-testi että Kruskal-Wallis-testi sopivat erityisesti mielipidettä järjestysasteikolla mitattujen havaintoarvojen käsittelyyn.

Mann-Whitney-testi on parametriton testi kahden riippumattoman ryhmän mediaanien vertailuun. Testiä kutsutaan myös U-testiksi tai Wilcoxonin järjestyssummatestiksi. Testiä käytetään vertailtaessa kahta mediaania, jotka ovat saatu mittaamalla sama ominaisuus kahdelta eri ryhmältä. Testi ei edellytä havaintojen normaalijakautuneisuutta ja sitä voidaan käyttää myös pienillä otoksilla (alle 30 havaintoarvoa). Selitettävän muuttujan arvot tulee olla mitattuna vähintään järjestysasteikolla.

Mann-Whitey-testi erottelee mediaanit, mutta se ei kerro juuri muita jakaumien välisiä eroja. Siksi testi ei sovellu kahden jakauman samuustestiksi.

Testin nollahypoteesi tarkoittaa, että kahden otoksen mediaanit ovat samat. Merkitään mediaaneja μ_1 ja μ_2, jolloin nollahypoteesi on $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Vaihtoehtoja vastahypoteesiksi on kolme: $H_1 : \mu_1 < \mu_2$, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ja $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Testin suorittamiseksi otetaan kahden vertailtavan ryhmän havaintoarvot, jotka ovat mitattu samalla mittarilla. Havaintoarvot yhdistetään ja järjestetään suuruusjärjestykseen ja annetaan niille vastaavat järjestysluvut

$$r_{1,1}, r_{1,2}, \ldots, r_{1,n_1}, r_{2,1}, r_{2,2}, \ldots, r_{2,n_2}.$$

Jos yhdisteyissä havaintoarvoissa on samoja lukuja eli ne järjestetään peräkkäin, annetaan niille kaikille järjestysnumeroksi alkuperäisten peräkkäisten järjestysnumeroiden keskiarvo. Tämän jälkeen lasketaan yhteen ensimmäisen otoksen n_1 järjestyslukua ja saadaan luku $\omega_1 = r_{1,1} + r_{1,2} + r_{1,n_1}$ ja vastaavasti toisen otoksen n_2 vastaava luku ω_2. Merkitään vielä $\omega = min(\omega_1, \omega_2)$. Näistä saataisiin vastaavasti satunnaismuuttujat W_1, W_2 ja W.

Jos $\mu_1 < \mu_2$, pyrkii ω_1 olemaan pieni ja ω_2 suuri. Tämä tilanne johtaa nollahypoteesin hylkäämiseen ja vastahypoteesin $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ hyväksymiseen.

Vastaavasti jos $\mu_1 > \mu_2$, pyrkii ω_1 olemaan suuri ja ω_2 pieni, jolloin nollahypoteesi hylätään ja vastahypoteesi $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ hyväksytään.

Yleisesti, mikäli jompikumpi luvuista ω_1 tai ω_2 on pieni, on myös ω pieni, jolloin mediaanit eivät ole yhtä suuret ja nollahypoteesin hylkääminen johtaa vastahypoteesin $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ hyväksymiseen.

Kruskal-Wallis-testi on yleistys Mann-Whitney-testistä tilanteeseen, jossa vertailtavia ryhmiä on enemmän kuin kaksi. Kruskal-Wallis-testin käytölle on samat vaatimukset kuin Mann-Whitney-testille.

Laskutapa Kruskal-Wallis-testissä on samanlainen kuin Mann-Whitney-testissä. Yhdistettyjen vertailtavien ryhmien (k kpl) havaintoarvojen järjestylukujen summat ovat $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ ja niitä vastaavat satunnaismuuttujat ovat $W_1, W_2, \ldots, W_k$. Merkitään, että n_j on j:nnen ryhmän koko ja $n = n_1 + \cdots + n_k$. Testi tehdään approksimoimalla, että satunnaismuuttujalla

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{W_j^2}{n_j} - 3(n+1),$$

on χ^2-jakauma $k-1$ vapausasteella. Testin p-arvo saadaan realisoitunutta H:n arvoa vastaavana χ^2-jakauman loppuhäntätodennäköisyytenä $k-1$ vapausasteella.

Korrelaatiokerroin: Muuttujien välistä riippuvuutta voidaan kutsua *korrelaatioksi*. Jos korrelaatio kahden muuttujan välillä on voimakasta, voidaan toisen muuttujan arvoista päätellä toisen muuttujan arvot melko täsmällisesti. *Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokerroin* on parametrillinen ja *Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin* parametriton menetelmä korrelaation laskemiseksi.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerrointa ρ käytetään useimmiten järjestysasteikollisten muuttujien välistä yhteyttä tutkittaessa. Aineiston havaintoarvot järjestetään suuruusjärjestykseen ja niille annetaan järjestysluvut. Järjestyslukujen erotus D lasketaan havaintopareittain ja järjestyskorrelaatiokerroin saadaan kaavasta

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} D_i^2,$$

missä n on havaintojen lukumäärä.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin saa arvoja välillä $[-1, 1]$. Kertoimen arvo 1 tarkoittaa järjestyslukujen täsmälleen samaa järjestystä, arvo 0 tarkoittaa, ettei korrelaatiota ole ja arvo -1 tarkoittaa järjestyslukujen täsmälleen vastakkaista järjestystä.

Korrelaation tilastollista merkitsevyyttä voidaan tarkastella testisuureella

$$t = \rho \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}},$$

missä ρ on korrelaatiokerroin ja n havaintojen lukumäärä. Lasketaan testisuureen arvoa vastaava p-arvo Studentin t-jakaumasta. Jos p-arvo on riittävän pieni tietyllä riskitasolla, korrelaatio kahden muuttujan välillä on tilastollisesti merkitsevä.

7.2 Tutkimuksen toteutus

Tutkimus toteutettiin verkkokyselynä internetissä. Linkki sähköiseen kyselylomakkeeseen lähetettiin sähköpostilla opettajille. Vastausaikaa kyselyyn oli kaksi viikkoa, jonka jälkeen kysely suljettiin. Verkkokysely on helppo toteuttaa ja vastaajien on siihen helppo vastata. Kuitenkin posti- ja verkkokyselyllä vastausprosentti jää alhaiseksi verrattuna henkilökohtaiseen haastatteluun tai rajatulle joukolle tietyssä paikassa (esimerkiksi työpaikalla) järjestetyssä lomakekyselyssä.

Kyselyssä kerätty aineisto muokattiin havaintomatriisiksi. Havaintomatriisia käsiteltiin ja laskenta suoritettiin SPSS-ohjelmistolla (Statistical Package for the Social Sciences), joka on monipuolinen tilastollisen tietojenkäsittelyn ohjelmisto.

7.2.1 Tutkimuksen perusjoukko ja otos

Tutkimuksen perusjoukko on matematiikan opettajat. Matematiikan opettajat kattaa kaikki luokilla 7.-9. ja lukiossa matematiikka opettavat henkilöt riippumatta heidän koulutuksestaan tai pätevyydestään. Otos valittiin tässä tutkimuksessa tietyin perustein eikä satunnaisesti. Otoksessa on 335 opettajaa Pirkanmaalta. Opettajat valikoituivat tutkimukseen sen perusteella, kenen sähköpostiosoite löytyi koulun internetsivuilta. Tutkimuksen varsinaisen otoksen muodostavat ne, jotka vastaavat kyselyyn.

7.2.2 Kyselylomakkeen laadinta

Kysely sisältää kolme eri osiota, jotka ovat sähköisessä kyselylomakkeessa sijoitettu eri sivuille. Tehtävänantojen sanamuodot pyrkivät olemaan yksikäsitteisiä, lyhyitä ja selkeitä. Kyselyä ei varsinaisesti testattu ennen lähettämistä kyselyyn osallistuville. Kyselylomakkeen kuitenkin kävi läpi useampi henkilö. He tarkastivat, että kysely on riittävän selkeä ja yksikäsitteinen. Kyselylomake on liitteessä B.

Kyselylomakkeen alussa kerätään vastaajan taustatietoja kuten sukupuoli, opetusvuosien määrä, opetettava luokkataso ja koulutus. Taustatietoja käytetään hyväksi tutkimuksessa ryhmittelemällä vastaajia. Opetusvuosien määrästä riittää saada karkea arvio, joten ne jaettiin valmiiksi ryhmiin alle 2 vuotta, 2-5 vuotta, 6-10 vuotta, 11-20 vuotta ja yli 20 vuotta. Luokkatasot, joilla opettaja opettaa tai on opettanut, jaettiin myös ryhmiin 1.-6. luokat, 7.-9. luokat, lukion lyhyt matematiikka ja lukion pitkä matematiikka. Koulutus kysytään avoimena kysymyksenä, koska oletettavasti opettajilla on monenlaisia koulutuksia.

Toinen osio keräsi tietoa opetuksen lähtökohdista. Kysymykseksi asetettiin: Kuinka paljon käytät funktion käsitteen opetuksen suunnittelussa seuraavia asioita? Tämän jälkeen kysyttiin yhdeksää opetuksen suunnitteluun liittyvää asiaa ja kymmenentenä oli ”jotain muuta”, jota seurasi avoin tila perusteluille ja tarkennuksille. Osiossa vastattiin valitsemalla sopivin vaihtoehto 5-portaiselta Likert-asteikolta. Likert-asteikon ensimmäinen vaihtoehto tarkoitti ”en lainkaan” ja viimeinen ”aina”. Kyselyyn valittiin 5-portainen Likert-asteikko, koska sen oletettiin erottelevan riittävästi vastauksia. Asteikon jälkeen vastaajalle tarjottiin mahdollisuus vastata ”en osaa sanoa”. Tällä vastausvaihtoehdolla pyrittiin vähentämään epävarmojen vastausten kasautumista asteikon puoleen väliin. Opetuksen lähtökohtiin liittyen kysyttiin avoimena kysymyksenä opettajilta käytössä olevan oppikirjasarjan nimeä.

Kyselyn kolmas osio keräsi tietoa siitä, mitä opettajat pitävät tärkeänä funktion käsitteen opetuksessa. Kysymykseksi asetettiin: Kuinka tärkeänä pidät annettua väittämää funktion käsitteen opetuksen kannalta? Väittämiä oli yhteensä 24, joihin vastattiin valitsemalla sopivin vaihtoehto 5-portaiselta Likert-asteikolta. Likert-asteikolla ensimmäinen vaihtoehto tarkoitti ”merkityksetön” ja viimeinen ”erittäin tärkeä”. Tässäkin osiossa oli asteikon jälkeen erikseen vaihtoehto ”en osaa sanoa”.

Jokaisesta kuudesta aiemmin käsitellystä funktiokäsitysryhmästä oli neljä väittämää. Väittämät olivat valittu tutkittujen oppikirjojen ja Vinnerin ja Dreyfusin tutkimuksen [5] avulla. Osa väittämistä oli tehty tarkoittamaan samaa asiaa vain hieman eri sanoin. Nämä yksittäiset väittämät yhdessä muodostavat tutkimuksen mittarin.

Vastaavuus:

1. Funktio on kuvaus.
2. Funktio on kahden joukon alkioiden välinen vastaavuus siten, että kutakin ensimmäisen joukon alkiota vastaa täsmälleen yksi jälkimmäisen joukon alkio.
3. Funktio liittää jokaiseen määrittelyjoukon alkioon täsmälleen yhden maalijoukon alkion.
4. Funktio liittää jokaiseen muuttujan arvoon yhden tarkalleen määrätyn funktion arvon.

Riippuvuusrelaatio:

1. Funktio kuvaa riippuvuutta.
2. Kaksi suuretta voivat riippua toisistaan siten, että toisen arvo voidaan laskea, kun toisen arvo tunnetaan.
3. Funktion arvo riippuu muuttujan arvosta.
4. Funktio kuvaa kahden suureen välistä yhteyttä.

Sääntö:

1. Funktiota ei voida aina ilmaista matemaattisesti, mutta tietyn säännön avulla pystytään päättelemään funktion arvo.
2. Funktiota voidaan havainnollistaa ”funktiokoneella”.

3. Funktio tarkoittaa sääntöä, jolla muuttujasta saadaan funktion arvo.
4. Kahden suureen välistä säännönmukaista riippuvuutta kutsutaan funktioksi.

Kaava:

1. Funktio on matemaattinen esitystapa kahden suureen väliselle yhteydelle.
2. Funktio määritellään antamalla funktion lauseke.
3. Jos suureen arvo saadaan laskettua toisesta suureesta matemaattisten laskutoimitusten avulla, tätä laskusääntöä sanotaan funktion lausekkeeksi.
4. Funktio on kaava, algebrallinen lauseke tai yhtälö.

Operaatio:

1. Muuttujan arvoa operoimalla saadaan funktion arvo.
2. Funktio on operaatio.
3. Funktio ”tekee” muuttujalle jotain saadakseen funktion arvon.
4. Funktio on toimenpide, jolla annetuista arvoista saadaan tietyin edellytyksin funktion arvot.

Representaatio:

1. Funktio voidaan määritellä graafisen kuvaajan avulla.
2. Funktio voidaan määritellä sen yhden esitystavan (kuten graafisen tai symbolisen) avulla.
3. Funktio voidaan määritellä sanallisesti.
4. Funktio voidaan määritellä muuttujan arvoista ja niitä vastaavien funktion arvoista kootun taulukon avulla.

Viimeisenä kyselylomakkeessa oli avoin tehtävä, jossa pyydettiin antamaan esimerkki, mitä opettaja haluaisi oppilaan vastaavan kysymykseen: ”Mikä on funktio?” Avoimen kysymyksen tarkoitus oli kerätä mahdollisesti muita funktion käsitteeseen liittyviä asioita ja huomioita kuin väittämissä. Koska verkkokyselyssä ei pysty vastaamaan kuin vastauksille tarkoitetuille paikoille, on tutkimuksessa hyvä olla avoimia tehtäviä, joihin vastaaja saa antaa huomioita, perusteluita ja selityksiä, mikäli haluaa.

Tässä kyselylomakkeessa kaikki vastauskohdat olivat vapaavalintaisia, jotta kyselyn täyttäminen olisi mahdollisimman yksinkertaista ja helppoa. Väittämissä tyhjiksi jääneet kohdat tulkitaan ”en osaa sanoa”, jolloin ne jäävät pois tuloksista.

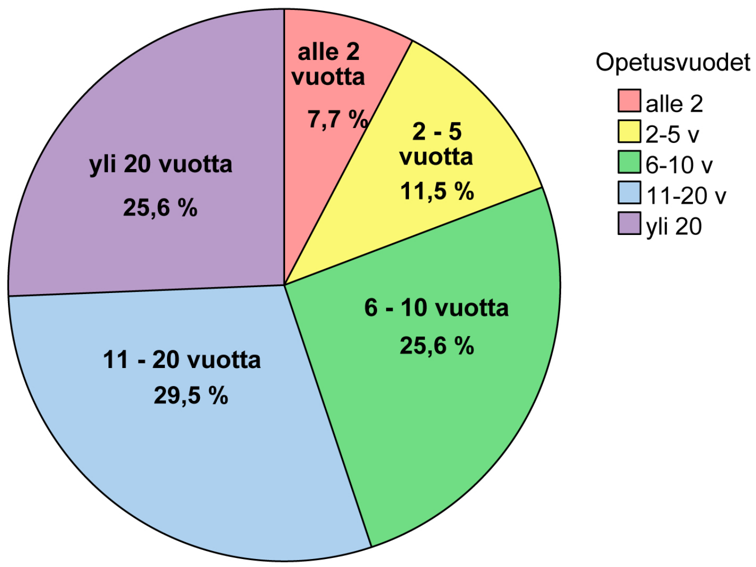
8. KYSELYTUTKIMUKSEN TULOKSET

Tässä luvussa esitellään ensin kyselyyn vastanneiden opettajien taustatietoja. Sitten vastataan tutkimuskysymyksiin 3–5. Lopuksi arvioidaan tutkimuksen luotettavuutta.

8.1 Taustatiedot

Kyselyn alussa kysyttiin taustatietoja opettajista. Kyselyyn vastasi yhteensä 96 opettajaa vastausprosentin ollen 28,7 %. Tutkimukseen mukaan hyväksyttiin vain kaikki kyselyn valmiiksi saattaneet 79 vastausta. Näistä vielä yksi vastaus poistettiin puutteellisten vastausten vuoksi. Yhteensä otos kattaa siis 78 vastausta.

Vastanneista opettajista 55,1 % ($n = 43$) on miehiä ja 44,9 % ($n = 35$) on naisia. Opettajien opetusvuosien jakauma on esitetty kuvassa 8.1.



Kuva 8.1: Opettajien opetusvuosien jakauma

Opettajilta kysyttiin koulutus avoimena kysymyksenä. Opettajista 65,4 % ($n = 51$) on koulutukseltaan filosofian maistereita (FM) ja 23,1 % ($n = 18$) on diplomi-insinöörejä (DI), joilla oli useimmiten mainittu vastauksessa erikseen pedagogiset opinnot. Muita koulutuksia on 9,0 % ($n = 7$) ja tyhjäksi kohdan jätti 2,6 % ($n = 2$).

Kyselylomakkeessa kysyttiin, millä luokilla opettaja opettaa tai on opettanut matematiikkaa. Opettajista 73,1 % opettaa 7.-9. luokilla, 37,2 % lukion lyhyttä matematiikkaa ja 39,7 % lukion pitkää matematiikkaa. Vastanneet ryhmiteltiin tarkemmin luokkatasojen mukaan ja tulokset ovat taulukossa 8.1.

Taulukko 8.1: Opettajien opettamat luokkatasot

Luokkataso	Vastanneet n	Prosenttiosuus (%)
7.-9. lk	39	50,0
Lyhyt mat.	2	2,6
Pitkä mat.	6	7,7
7.-9. lk & lyhyt mat.	6	7,7
7.-9. lk & pitkä mat.	4	5,1
7.-9. lk & lyhyt mat. & pitkä mat.	8	10,3
lyhyt mat. & pitkä mat.	8	16,7

Kyselylomakkeessa ei ollut mahdollista vastata erikseen eri luokkatasoille sopivia vastauksia. Opettajat, jotka opettavat sekä yläkoulussa että lukiossa, vastasivat parhaaksi katsomallaan tavalla väittämiin. Vain kaksi opettajaa jätti tästä syystä vastaamatta tai vastasi ”en osaa sanoa” useampiin kohtiin funktion käsitettä koskevissa väittämissä perustellen tämän viimeisessä avoimessa tehtävässä.

Tässä tutkimuksessa otetaan tutkittaviksi ryhmiksi pelkästään yläkoulussa opettavat ja muut, joihin kuuluu siis lukiossa opettavat sekä yläkoulussa että lukiossa opettavat. Tällöin kumpikin tutkittava ryhmä on yhtä suuri ($n = 39$).

Vertaillaan taustatietoja Opetushallituksen teettämän valtakunnallisen vuoden 2011 matematiikan oppimistuloksia koskevan raportin [12] opettajien taustatietoihin. Raportissa tutkitut matematiikan opettajat opettavat ainakin yläkoulussa, mutta raportissa ei kerrota, kuinka suuri osa heistä opettaa myös lukiossa. Tässä kyselytutkimuksessa on sekä peruskoulussa että lukiossa opettavia opettajia. Raportissa opettajista 58,5 % oli naisia ja 41,5 % miehiä. Tässä tutkimuksessa vastanneista hieman yli puolet (55,1 %) on miehiä. Ero miesten ja naisten määrissä raportissa ja tässä tutkimuksessa on 13,6 prosenttiyksikköä. Raportissa koulutukseltaan filosofian maistereita (FM) tai kandidaatteja (FK) oli 68 %, mitä lähellä on myös tähän kyselytutkimukseen vastanneiden filosofian maistereiden määrä (65,4 %).

Opetusvuosien määriä ei voida suoraan vertailla, koska ne ovat mitattu eri tavoin. Alle viisi vuotta opettaneita opettajia oli raportissa hieman vajaa 20 % ja tässä kyselytutkimuksessa enintään viisi vuotta opettaneita opettajia on 19,2 %. Yli 10 vuotta opettaneita opettajia oli raportissa noin kaksi kolmasosaa eli noin 67 % ja tässä tutkimuksessa heidän osuus on 55,1 %. Raportissa opettaja oli opettanut keskimäärin 16 työvuotta ja tässä tutkimuksessa keskimääräinen vastaaja on opettanut

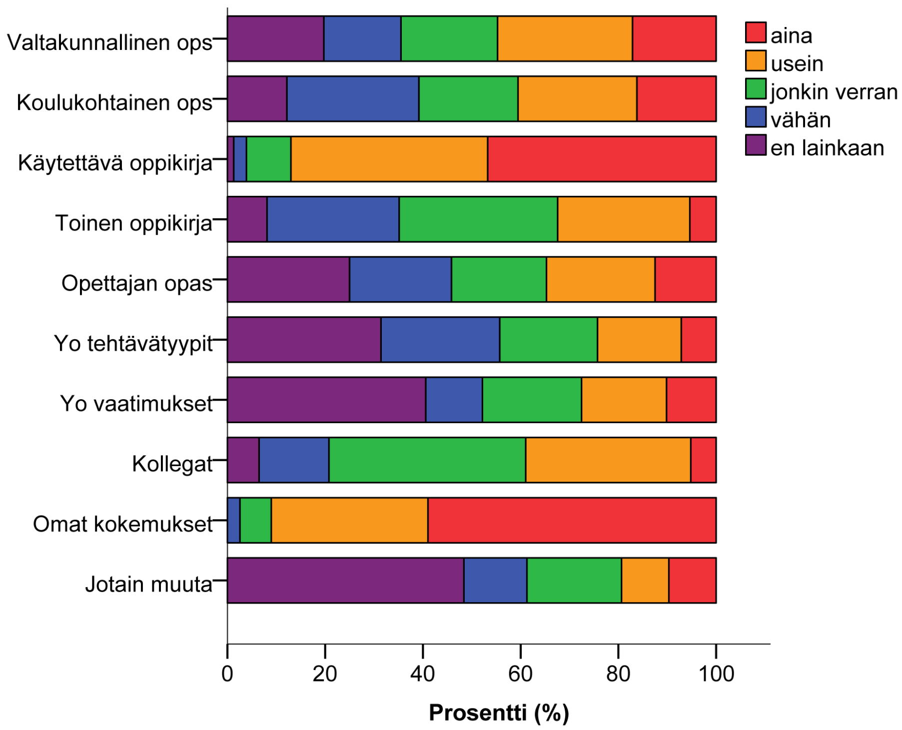
11-20 vuotta.

Opettajien taustatietoja vertailemalla voidaan todeta, että tämän tutkimuksen otoksen muodostavat opettajat ovat samansuuntainen ryhmä kuin matematiikan opettajat valtakunnallisesti. Tämän tutkimuksen tuloksia voidaan pitää vähintäänkin suuntaa antavina myös valtakunnallisesti.

8.2 Opetuksen lähtökohdat

Merkitsevyyden tutkiminen: Ennen merkitsevyystestien käyttämistä tutkitaan, ovatko opetuksen lähtökohdan muuttujat jakautuneet normaalisti. Testinä käytetään Kolmogorov-Smirnovin testiä Lillieforsin testin oletuksin. Mikään opetuksen lähtökohtia mittaava muuttuja ei ole normaalijakautunut 0,1 % riskitasolla.

Tutkitaan eroaako opetuksen lähtökohdat toisistaan yläkoulun ja lukion opettajilla. Erojen merkitsevyyttä tutkitaan Mann-Whitney-testillä, jonka p-arvot on esitetty liitteessä E. Yläkoulun ja lukion opettajien lähtökohdissa suunnitella opetusta ei havaita juurikaan eroja. Lukion opettajilla painottui ylioppilaskirjoitusten huomioiminen tilastollisesti merkitsevästi enemmän kuin yläkoulun opettajilla.

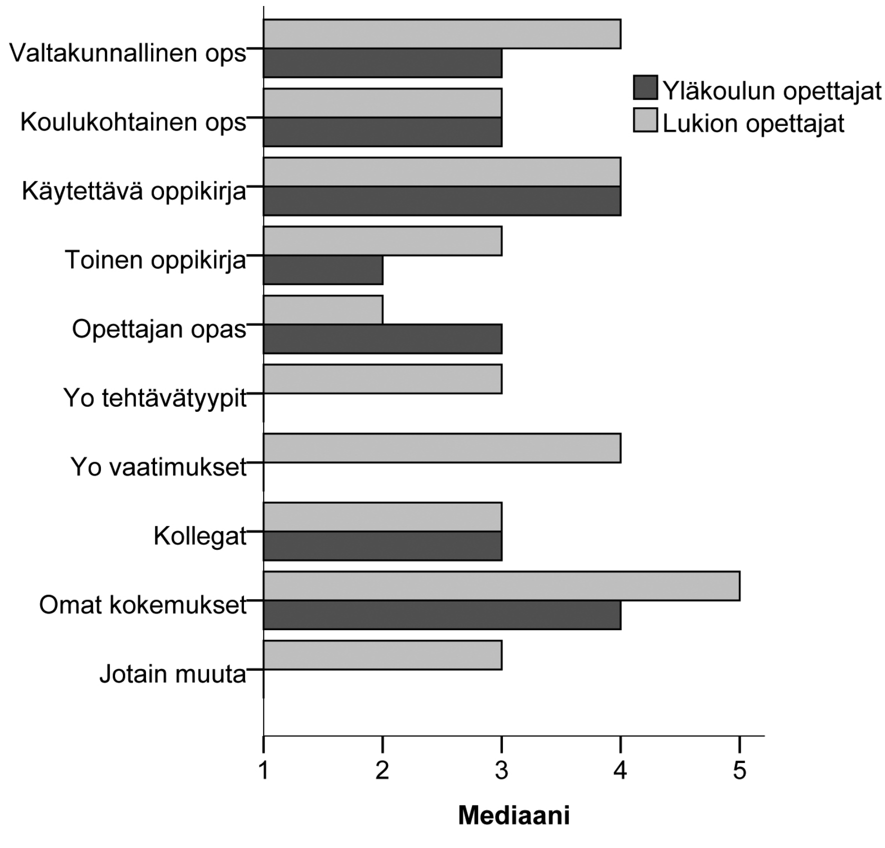


Kuva 8.2: Opetuksen suunnittelun lähtökohdat asteikolla ”en lainkaan”, ”vähän”, ”jonkin verran”, ”usein”, ”aina”.

Frekvenssit ja prosenttiosuudet on esitetty tarkemmin liitteessä D.

Tärkeimmäksi opetuksen suunnitteluun vaikuttavaksi tekijäksi tutkimuksessa nousee oppilailla käytössä oleva oppikirja ($Md = 4$). Jopa 87 % opettajista pitää käytettävää oppikirjaa usein tai aina opetuksen suunnittelussa. Tämä tulos tukee aiempia tutkimuksia, joissa oppikirjan merkitys opetuksen suunnittelussa korostuu. Sen sijaan opettajat käyttävät jotakin toista oppikirjaa oppilailla olevan oppikirjan rinnalla vain jonkin verran ($Md = 3$). Ei lainkaan ja aina toista oppikirjaa käyttäviä opettajia on vähän, yhteensä alle 14 % vastanneista.

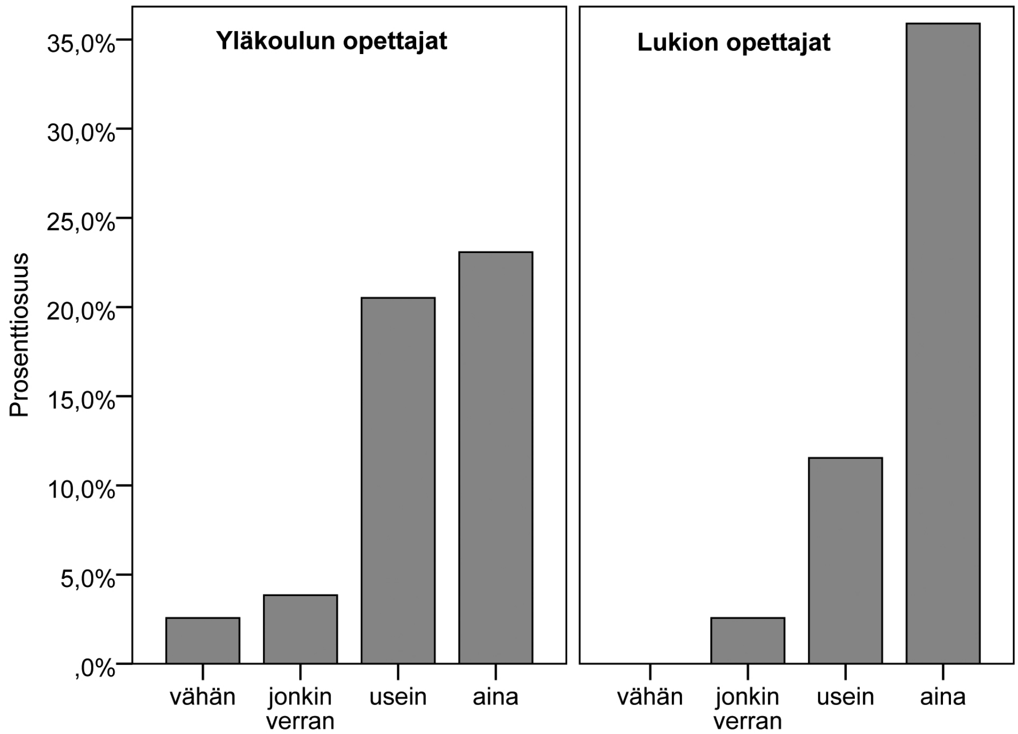
Valtakunnallista ja koulukohtaista opetussuunnitelmaa pidetään tärkeänä asiana opetuksen yhdenmukaisuuden takaamiseksi valtakunnallisesti kaikille oppilaille. Opetussuunnitelmien käyttö opetuksen suunnittelussa on kyselyn perusteella melko tasaisesti jakautunut kaikille vastausvaihtoehdoille. Opetussuunnitelmia ei käytä lainkaan tai käyttää vähän noin 40 % vastanneista, mitä voidaan pitää suurena ryhmänä opettajista. Hieman tätä suurempi ryhmä opettajista pitää kuitenkin opetussuunnitelmia (valtakunnallista opetussuunnitelmaa 44,7 % ja koulukohtaista opetussuunnitelmaa 40,5 %) usein tai aina opetuksen suunnittelussa mukana. Naisopettajat suunnittelevat opetustaan tilastollisesti merkitsevästi enemmän sekä valtakunnallisen että koulukohtaisen opetussuunnitelman mukaan kuin miesopettajat.



Kuva 8.3: Opetuksen suunnittelun lähtökohdat opetettavan luokkatason mukaan jaettuna

Kirjallisesta materiaalista opettajan opasta käytetään mielummin harvoin kuin usein. Neljäsosa opettajista ei käytä opettajan opasta lainkaan. Lukion opettajat käyttävät opettajan opasta harvemmin kuin yläkoulun opettajat, mutta ero ei ole tilastollisesti merkitsevä.

Kollegoiden ideoita opetuksessa käytetään jonkin verran (40,3 %) tai usein (33,8 %). Sen sijaan omat kokemukset nousivat tutkimuksessa erityisesti esille. Sekä yläkoulun ($Md = 4$) että lukion ($Md = 5$) opettajat suunnittelevat opetusta vahvasti omien kokemustensa avulla. Lukion opettajilla omat kokemukset korostuivat erityisesti. Lukion opettajista lähes 72 % suunnittelee aina ja 23 % usein opetustaan omien kokemuksien pohjalta. Huomattavaa on myös, että yksikään opettaja ei vastannut, ettei käytä opetuksessa lainkaan tai vain vähän omia kokemuksia apuna. Yläkoulun opettajilla omat kokemukset eivät korostu yhtä paljon kuin lukion opettajilla. Yläkoulun opettajillakin 46 % opettajista suunnittelee aina ja 41 % usein opetustaan omia kokemuksia hyödyntäen. Ero yläkoulun ja lukion opettajien välillä on tilastollisesti merkitsevä.



Kuva 8.4: Opettajien omien kokemusten merkitys opetuksen suunnittelussa jaoteltuna opetettavan luokkatason mukaan.

Ylioppilaskokeisiin liittyvien kysymysten (tehtävätyypit ja vaatimukset) kohdalla ero yläkoulun ja lukion opettajilla on tilastollisesti merkitsevä. Lukion opettajat ymmärrettävästi suunnittelevat opetustaan huomioiden ylioppilaskokeiden vaatimukset ja tehtävätyypit. Opetuksen suunnittelussa 53,0 % opettajista käyttää aina tai usein ja 35,3 % jonkin verran ylioppilaskokeiden vaatimuksia. Ylioppilaskokeiden vaatimuksiin verrattuna lukion opettajat käyttävät hieman vähemmän opetuksen suunnitteluun ylioppilaskokeiden tehtävätyyppejä, joita 44,5 % opettajista vastaa käyttävänsä aina tai usein ja 33,3 % jonkin verran. Yläkoulun opettajista noin 91 % ei käytä lainkaan tai käyttää vain vähän opetuksen suunnitteluun ylioppilaskokeiden vaatimuksia tai tehtävätyyppejä. Yläkoulun opettajissa ainoana erona on, että ylioppilaskokeiden vaatimuksia ei lainkaan käyttäviä on enemmän kuin vastaavaa ryhmää tutkittaessa ylioppilaskokeiden tehtävätyyppejä.

Kyselyssä sai täydentää avoimena kymyksenä, mitä muuta kuin mainittuja asioita opettaja käyttää opetuksen suunnittelussa. Vastauksia tuli yhteensä 13. Vastauksista suurin osa viittasi internetissä olevaan materiaaliin, oppimisympäristöihin ja videoihin tai tietokoneohjelmiin kuten GeoGebra ja Excel. Kaksi vastanneista opettajista on itse tuottanut materiaalia internetiin. Myös kirjallisia lähteitä kuten lehdestä löytyviä artikkeleja voidaan käyttää opetuksen suunnittelussa.

Jotain muuta kuin valmiiksi annettuja vaihtoehtoja opetuksen suunnittelussa ei käytä kuitenkaan lainkaan lähes puolet vastanneista. Aina tai usein jotain muuta vastasi käyttävänsä alle 20 % vastanneista. Vastausten määrä jäi kysymyksessä myös alhaiseksi.

Oppikirjasarjat: Suosituimmat oppikirjasarjat yläkoulussa ovat vastausten perusteella Pii 38,9 %, Laskutaito 22,2 % ja Kuutio 18,5 %. Muita käytössä olevia kirjasarjoja ovat Kartio (11,1 %), Kolmio (5,6 %) ja Pointti (3,7 %). Lukion pitkän matematiikassa suosituimmat oppikirjat ovat Pyramidi 52,0 % ja Pitkä matematiikka 44,0 %. Kyselyssä mainittiin myös Calculus ja Matematiikan taito. Kahdessa vastauksessa oli mainittu, että käytössä on useampia eri oppikirjoja. Lukion lyhyen matematiikan suosituin oppikirjasarja on Lyhyt matikka (64,7 %) ja muista oppikirjoista oli mainittu Sigma ja Variaabeli.

Oppikirjojen suosituimmuudesta maanlaajuisesti tai edes Pirkanmaalla on mahdoton vetää johtopäätöksiä, koska kyselyyn vastasi useita opettajia samoista kouluista, jolloin kyseisillä kouluilla käytössä olevat oppikirjat painottuivat enemmän. Todellisen tuloksen saamiseksi yhdestä koulusta pitäisi hyväksyä vain yksi vastaus, mikä ei tässä tutkimuksessa kerätyillä tiedoilla ole mahdollista. Tällöin tutkimuksessa tulisi olla riittävästi kouluja mukana. Tuloksia voidaan pitää kuitenkin suuntaa antavina suosituimpien oppikirjasarjojen osalta.

8.3 Opettajien funktiokäsitys

Kyselylomakkeen kolmas osio mittaa, mitä opettajat pitävät tärkeänä funktion käsitteen opetuksen kannalta. Väittämiä oli kutakin funktiokäsityluokkaa (vastaavuus, riippuvuusrelaatio, sääntö, kaava, operaatio ja representaatio) kohti neljä. Kootaan kunkin luokan neljä väittämää yhteiseksi summamuuttujaksi, jolla operoidaan jatkossa. Väittämät eri luokkiin on rakennettu itse. Tutkitaan, mittaavatko neljä väittämää samaa asiaa, laskemalla summamuuttujille reliabiliteettikerroin eli Cronbachin alfa.

Taulukko 8.2: Eri funktiokäsitysluokkien Cronbachin alfan arvot ja alfan arvot, jos kyseinen väittämä jätetään pois luokasta.

Luokka	1	2	3	4	α
Vastaavuus	**0,876**	0,720	0,666	0,755	0,813
Riippuvuusrelaatio	0,547	0,557	0,611	0,459	0,616
Sääntö	0,550	0,501	0,450	0,454	0,562
Kaava	0,478	0,536	0,442	**0,600**	0,588
Operaatio	0,578	0,600	0,637	0,594	0,669
Representaatio	0,552	0,580	0,661	0,633	0,674

Pidetään alfan arvoa 0,60 alimpana hyväksyttävänä alfan arvona. Määritetyistä Cronbachin alfan arvoista huomataan, että luokat kaava ja sääntö jäävät hyväksyttävän alfan rajan alle. Vastaavuus-luokan alfan arvoa 0,813 voidaan pitää erittäin hyvänä. Taulukkoon 8.2 on kirjattu, mikä alfan arvo saataisiin, jos kyseinen väittämä jätetään tutkimuksesta pois. Vastaavuus-luokan ensimmäisen väittämän ja kaava-luokan neljännen väittämän jättäminen pois kasvattaisi alfan arvoa. Suoraan ei voida kuitenkaan olettaa, että väittämä on huono tai se ei ole sopiva kyseiseen luokkaan. Väittämä voi olla heikosti erotteleva eli väittämään on vastattu samalla tavalla. Vastaavuus-luokan alfan arvo on jo riittävän korkea, joten ensimmäisen väittämän jättämisellä pois ei olisi käytännön merkitystä.

Kaava-luokan neljäs väittämä on: ”Funktio on kaava, algebrallinen lauseke tai yhtälö.” Väittämän mediaani on 3, ja 39,5 % on vastannut keskimmäiseen eli kolmanteen vaihtoehtoon. Väittämä ei ole kovin erotteleva eikä sitä ole pidetty erityisen tärkeänä eikä erityisen merkityksettömänä opetuksen kannalta. Sisällöllisesti väittämä kuvaa kaava-luokkaa hyvin ja pidetään väittämä siksi tutkimuksessa mukana. Mikäli väittämä olisi jätetty pois, alfan arvo olisi kasvanut alimpaan hyväksyttävään alfan arvoon, mutta muutos olisi kuitenkin pieni.

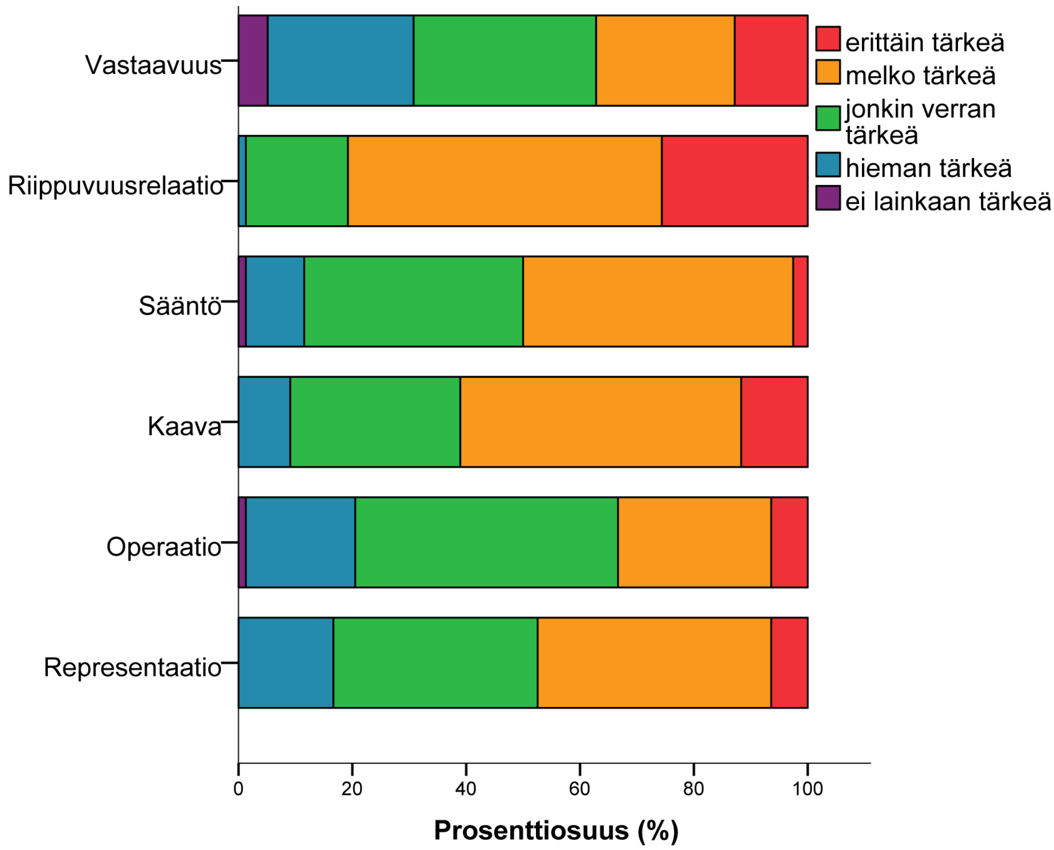
Sääntö-luokan alfan arvo jää alle hyväksyttävän alfan arvon, mikä tarkoittaa, että mittari ei ole luotettava. Mitä vähemmän mittarissa on muuttujia, sitä pienempi on todennäköisesti alfan arvo. Toisin sanoen mitä enemmän mittarissa on samaa asiaa testaavia muuttujia, sitä luotettavampi tulos on. Summamuuttujaksi yhdistettiin tässä tutkimuksessa vain neljä muuttujaa, joten pieni alfan arvo on ymmärrettävissä. Sääntö-luokkaa voidaan pitää vähintäänkin suuntaa-antavana, vaikka alfan arvo jäi matalaksi.

Yksittäisistä väittämistä opettajien mielestä tärkeimmät ovat ”Funktion arvo riippuu muuttujan arvosta.” ja ”Funktio tarkoittaa sääntöä, jolla muuttujasta saadaan funktion arvo.”. Ensimmäistä väittämää pitää erittäin tärkeänä jopa 53,85 % opettajista ja melko tärkeänä 30,77 %. Toista väittämää pitää erittäin tärkeänä 38,96 %

opettajista ja melko tärkeänä 40,26 %. Väittämää ”Funktio kuvaa riippuvuutta.” yksikään opettaja ei pitänyt merkityksettömänä (ei lainkaan tärkeänä) ja 70,67 % opettajista pitää väittämää melko tai erittäin tärkeänä. Tämä oli ainoa väittämä, jota yksikään opettaja ei pitänyt merkityksettömänä funktion käsitteen opetuksen kannalta.

Vähiten tärkein väittämä opettajien mielestä on ”Funktio on operaatio.”, jota 20,51 % opettajista pitää merkityksettömänä ja 30,77 % vain hieman tärkeänä. Myös väittämää ”Funktio on kahden joukon alkioiden välinen vastaavuus siten, että kutakin ensimmäisen joukon alkiota vastaa täsmälleen yksi jälkimmäisen joukon alkio.” ei pidetä tärkeänä, sillä 24,36 % opettajista pitää väittämää ei lainkaan tärkeänä. Kuitenkin lukion opettajista vain 4,76 % ei pidä väittämää lainkaan tärkenä.

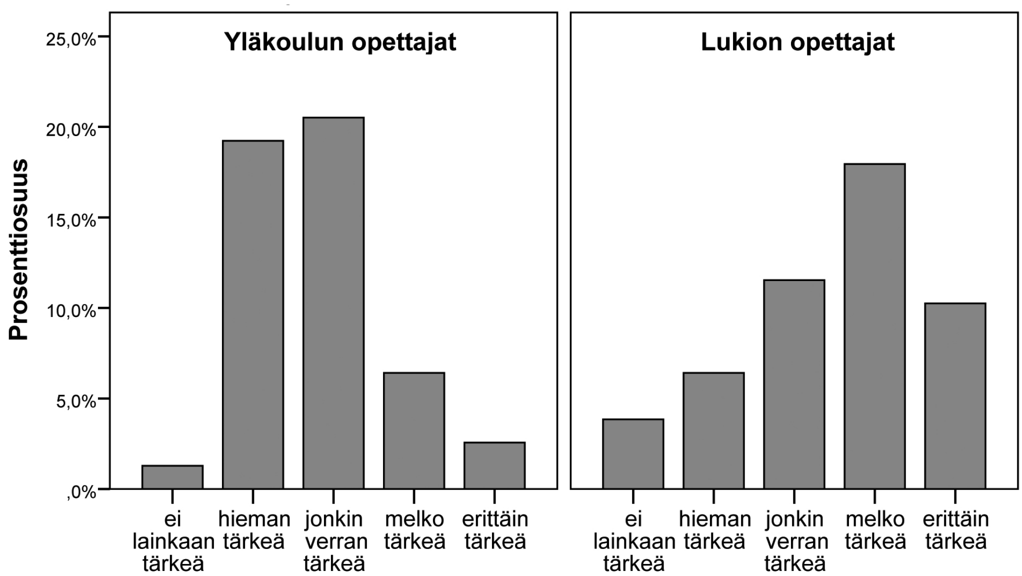
Summamuuttujat: Käydään läpi funktiokäsitykseen liittyvä aineisto summamuuttujien avulla.



Kuva 8.5: Opettajien vastaukset funktiokäsitysluokkiin asteikolla ”ei lainkaan tärkeä”, ”hieman tärkeä”, ”jonkin verran tärkeä”, ”melko tärkeä”, ”erittäin tärkeä”.

Vastaavuus-luokkaan kuuluvat asiat ovat kokonaisuutena jonkin verran tärkeä funktion käsitteen opetuksessa. Lukion opettajille funktion ymmärtäminen vastaavuutena on tilastollisesti merkitsevästi tärkeämpää kuin yläkoulun opettajille. Melko tai erittäin tärkeänä vastaavuutta funktion käsitteen opetuksessa pitää 56,4 % lukion opettajista ja vain 17,9 % yläkoulun opettajista. Huomattavaa on myös, että 5,1 % opettajista ei pidä funktion ymmärtämistä vastaavutena lainkaan tärkeänä. Myös opettajan opetusvuosien määrä vaikuttaa vastaavuuden tärkeyteen. Alle 2 vuotta opettaneet opettajat eivät pidä vastaavuutta tärkeänä ja yli 20 vuotta opettaneet pitävät vastaavuutta tärkeänä. Ero on tilastollisesti merkitsevä.

Spearmanin järjestyskorrelaatiokertoimien perusteella vastaavuus-luokka ei korreloi muiden luokkien kanssa. Tämä erottaa vastaavuus-luokan muista luokista ja tarkoittaa, että opettajat ovat vastaneet vastaavuus-luokan väittämiin eri tavalla kuin muiden luokkien väittämiin. Muiden luokkien välillä korrelaatiot ovat p-arvojen perusteella 1 % riskistasolla tilastollisesti merkitseviä. Korrelaatiot ovat positiivisia eli eri luokkiin liittyviin väittämiin on vastattu samansuuntaisesti. Korrelaatiot on esitetty liitteessä F.



Kuva 8.6: Vastaavuus-luokan vastausten jakautuminen jaoteltuna opetettavan luokkatason mukaan.

Funktiota riippuvuusrelaationa koetaan melko tärkeäksi ($Md = 4$). 80,7 % opettajista pitää funktiota riippuvuusrelaationa melko tai erittäin tärkeänä ja 98,6 % vähintään jonkin verran tärkeänä. Tämä nousi opettajien mielestä tärkeimmäksi funktiokäsitysluokaksi.

Funktio sääntönä koetaan jonkin verran tärkeäksi. 85,9 % opettajista pitää funktiota sääntönä jonkin verran tai melko tärkeänä.

Lähes puolet (49,4 %) opettajista pitää funktion merkintää kaavana melko tärkeänä. Kaava-luokka testaa funktion merkintätavan tärkeyttä opetuksessa ja tulos osoittaa, että merkintää pidetään jonkin verran tai melko tärkeänä. Kuitenkin esimerkiksi funktion ymmärtäminen riippuvuutena on tärkeämpää kuin merkintä kaavana.

Sen sijaan funktio operaationa koetaan vain jonkin verran tärkeäksi ja se jää tutkimuksessa vastaavuuden lisäksi muista luokista olemalla niitä merkityksettömämpi opetuksessa. Representaatiot eli funktion eri esitystavat koettiin jonkin verran tai melko tärkeiksi (yhteensä 76,9 %).

Opettajat ovat vastanneet vastaavuus-luokkaa lukuunottamatta hyvin samalla tavalla eri luokkien väittämiin. Tilastollisesti merkitseviä eroja muiden luokkien välille ei tutkimuksessa saada. Sukupuoli, opettajan opetusvuodet tai opetettava luokkataso eivät vaikuta merkitsevästi opettajien vastauksiin vastaavuus-luokan poikkeusta lukuunottamatta. Merkitsevyystestit ovat esitetty liitteessä E. Vastausten mediaanit vaihtelevat vaihtoehtojen ”jonkin verran tärkeä” ja ”melko tärkeä” välillä. Mediaanien perusteella funktion ymmärtäminen riippuvuutena, sääntönä ja kaavana on yleisempää kuin funktion ymmärtäminen vastaavuutena, operaationa tai eri representaatioiden kautta.

Avoimen kysymyksen ”Mikä on funktio?” vastaukset Viimeisessä eli avoimessa tehtävässä kysyttiin, mitä opettajat haluaisivat oppilaidensa vastaavan kysymykseen: ”Mikä on funktio?” Kysymykseen vastasi 61 opettajaa. Osa opettajista vastasi kysymykseen tarkasti, osa hyvin epätarkasti ja jotkut perustelivat avoimeen tilaan vastauksiaan kyselyn aiempiin kohtiin.

Tehtävänannon perusteella kysymyksessä ei mitata opettajien funktion käsitteen ymmärtämistä vaan mitä he pitävät tärkeänä oppilaiden oppia. Esimerkiksi korkeasti koulutetun opettajan oman aineenhallinnan ja sitä kautta funktiokäsityksen tulee olla eri tasolla kuin mitä osaamista vaaditaan peruskoulun oppilaalta.

Pääasiassa opettajien antamat vastauksiin liittyvät funktiota kuvaavina sanat ”sääntö” ja ”riippuvuus”. Näissä vastauksissa useimmiten funktio kuvataan säännönmukaisena riippuvuutena. Myös funktion arvon laskeminen muuttujan arvosta nousee vastauksissa esille.

> *”Funktio on sääntö, joka kertoo, miten muuttujan arvosta saadaan funktion arvo.”* (yläkoulun opettaja)
>
> *”Sääntö, joka kertoo, mitä laskutoimituksia muuttujalle pitää tehdä.”* (lukion opettaja)
>
> *”Sääntö, joka tekee jokaiselle määrittelyjoukon jäsenelle jotain yksikäsitteisesti.”* (lukion opettaja)
>
> *”Funktio on sääntö, joka ilmaisee kahden (tai useamman) asian x ja y välisen matemaattisen riippuvuuden.”* (yläkoulun ja lukion opettaja)

Funktiosta on mainintoja laskutoimituksena sekä funktion graafisesta esityksestä. Funktion määritelmä vastaavuutena tai kuvauksena nousee esille aineistosta. Monet funktion kuvauksena määrittelevät opettajat ovat ottaneet vastauksensa sanatarkasti edellisen kyselyosion väittämistä. Myös muissa vastauksissa tällainen väittämien kopioiminen oli yleistä. Opettajien vapaamuotoisia vastauksia funktiosta vastaavuutena ovat esimerkiksi:

> *"Funktio kuvaa jokaisen määrittelyjoukon alkion täsmälleen yhdelle maalijoukon alkiolle."* (pitkän matematiikan opettaja)
>
> *"Funktiolla kuvataan määrittelyjoukon alkiot arvojoukon alkioksi."* (yläkoulun ja lukion opettaja)
>
> *"Funktio on kuvaus, joka on muuttujan arvon ja funktion arvon välissä."* (yläkoulun ja lukion opettaja)
>
> *"Jonkinlainen sääntö, joka liittää joukon toiseen."* (pitkän matematiikan opettaja)

Joillekin opettajille riittää, että oppilas osaa antaa esimerkin funktiosta. Pelkän esimerkin antaminen ei kuitenkaan kerro, miten oppilas ymmärtää funktion käsitteen. Oppilas on voinut opetella yksittäisen esimerkin ulkoa. Sen sijaan muulla tavoin omin sanoin selittäen vastauksesta voi tulkita paremmin, onko oppilas ymmärtänyt käsitteen oikein.

> *"Se [funktio] on sääntö, joka kuvaa riippuvuutta. Esimerkiksi irtokarkkipussin hinta riippuu karkkien määrästä, jolloin hinta on karkkimäärän funktio."* (yläkoulun ja lyhyen matematiikan opettaja)
>
> *"Funktio kertoo esimerkiksi populaation koon tietyllä hetkellä."* (lukion opettaja)
>
> *"Pyydän opiskelijoita selittämään funktiokäsitettä jonkun esimerkin avulla tai graafisesti, mistä tunnistaa funktion."* (pitkän matematiikan opettaja)
>
> *"Odotan oppilaiden/opiskelijoiden selittävän käsitteen funktio omin sanoin ilman oppikirjamääritelmän ulkoa muistamista."* (yläkoulun ja pitkän matematiikan opettaja)

Myös "funktiokoneeseen" liittyviä sanamuotoja löytyy opettajien vastauksista:

> *"Kun funktioon syötetään jokin luku...* (yläkoulun opettaja)
>
> *"Kun funktioon ("funktiokoneeseen") syötetään muuttuja, se työstää sen ja antaa tulosteeksi (funktion) arvon."* (peruskoulun ja lyhyen matematiikan opettaja)

"Funktion on toiminto tai kuvaus, se noudattaa tiettyä sääntöä, jolla jokaiselle syötteelle saadaan tuloste." (yläkoulun opettaja)

Yksi opettaja ottaa esille "funktiokoneen" tuomat ongelmat oikean funktion käsitteen muodostamisen kannalta. Myös toisella opettajalla on samansuuntainen ajatus funktiosta.

"Oppilaat saavat siitä [funktiokoneesta] käsityksen, että funktio muuttaa muuttujan x arvon y:n arvoksi. Näin he menettävät käsityksen käänteisfunktiosta. ... On vaikea selvittää, kuinka kampea kääntäen lihapalasta syntyy jauhelihaa, joka palautuu kääntämällä kampea toiseen suuntaan lihapalaksi. Funktio on ennemminkin rakkaus (sen avulla löydetään kaveri) ja todellinen rakkausfunktio on bijektio. Injektion tapauksessa joku voi jäädä ilman ja surjektiossa jollain on useampia kavereita. Funktion avulla löydetään Romeon kaveriksi Julia eikä suinkaan muuteta Romeota Juliaksi." (yläkoulun ja lukion opettaja)

"Funktio on sääntö, jonka avulla jokaiselle muuttujalle x saadaan "pari"/"kaveri" y." (yläkoulun opettaja)

Yksi opettaja mainitsee joukko-opin puuttumisen peruskoulun valtakunnallisesta opetussuunnitelman perusteista. Tämän vuoksi funktiota on mahdotonta määritellä relaationa, minkä vuoksi opettajan mielestä *"joutuu tyytymään hyvin heikkoon määrittelyyn."*

Sanamuodot funktion käsitteen kuvaamiseen ovat useimmissa vastauksissa epätäsmällisiä. Oppilaiden vastauksina epätäsmälliset vastaukset ovat ymmärrettäviä. Yksi opettaja mainitseekin, että oppilaat eivät vastaisi "näin täydellisesti" kuin opettaja itse on kysymykseen vastannut. Erään lukiossa lyhyttä ja pitkää matematiikkaa opettava opettaja pitää funktion käsitettä oppilaille hankalana ja funktion tarkastelun jäävän laskennalliselle tasolle. Kuitenkin hän toivoisi oppilaiden ymmärtävän funktion kahden joukon alkioiden vastaavuutena.

Kyselylomakkeessa kysyttiin kuitenkin, mitä opettaja haluaisi oppilaan vastaavan. Opettajan epätäsmällinen vastaaminen tehtävään voi johtua esimerkiksi kiireestä tai haluttomuudesta pohtia funktion käsitettä tai opetustaan. Toisena voitaisiin tulkita, että opettaja ei odota eikä edellytä oppilailtakaan täsmällistä vastausta.

Opetushallituksen teettämässä raportissa vuonna 2013 [10, s. 97] todettiin yläkoulun matematiikan opettajien pitävän tärkeänä opetuksessa käytännönläheisyyttä, oppilaiden aktiivista pohdintaa ja laskurutiineja. Sen sijaan matemaattinen täsmällisyys ei ole yhtä tärkeää. Tämä tutkimus tukee ajatusta, etteivät opettajat pidä matemaattista täsmällisyyttä erityisen tärkeänä.

8.4 Luotettavuuden arvionti

Tutkimuksen vastausprosentti jäi melko alhaiseksi $(28,7\%)$, minkä vuoksi tutkimusta voidaan pitää suuntaa-antavana. Kuitenkin otos $(n = 78)$ on kohtuullinen, jotta tuloksia voidaan yleistää. Opettajilta kerättyjen taustatietojen perusteella tutkimus voidaa yleistää matematiikan opettajiin, koska kyselytutkimukseen osallistuneet opettajat ovat melko homogeeninen ryhmä verrattuna Opetushallituksen valtakunnallisen raportin [12] tutkimuksessa mukana olleiden opettajien ryhmään.

Kyselyyn vastaamatta jättäneet vaikuttavat tutkimuksen luotettavuuteen. Vastaamatta jättäneet saattavat olla erilainen ryhmä kuin vastanneet ja siksi otos ei välttämättä ole edustava perusjoukkoon nähden. Opetusta koskevaan tutkimukseen saattavat vastata helpommin opettajat, jotka panostavat opetukseen enemmän kuin opettajat, jotka suunnittelevat opetusta vähemmän. Heikon aineenhallinnan omaavat opettajat saattavat kokea funktion käsitteeseen liittyvät väittämät hankaliksi ja jättää siksi vastaamatta.

Tutkimustulokset tukevat teoriaa, minkä vuoksi tutkimus vaikuttaa onnistuneelta. Kyselylomake laadittiin teorian ja oppikirja-analyysin pohjalta. Kyselylomake sisälsi avoimia ja suljettuja kysymyksiä, mikä lisäsi aineiston monipuolisuutta. Kyselylomakkeesta antoi useampi ihminen palautetta ennen kuin se lähetettiin tutkimukseen osallistuville. Näin kyselylomakkeesta tuli riittävän selkeä ja yksinkertainen.

Tutkimuksessa laskettiin reliabiliteettikertoimet (Cronbachin alfa) summamuuttujia muodostettaessa. Summamuuttujien osalta tutkimus on reliaabeli eli yhdistettävät summamuuttujat mittaavat samaa asiaa. Muita mahdollisuuksia mitata reliabiliteettiä tutkimuksessa ei ollut.

Kun tutkimusaineisto kerätään ihmisiltä, on mahdollisuus virheellisiin tuloksiin, vaikka mittarit ja tilastolliset menetelmät olisivat luotettavia. Tutkittavien ihmisten vastauksiin voi vaikuttaa esimerkiksi mieliala ja asenteet, päivä ja aika. Mikäli otos on suuri, tulokset ovat myös luotettavampia.

9. YHTEENVETO

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten oppikirjat käsittelevät funktion käsitettä ja mitä opettajat pitävät tärkeänä opettaa funktiosta. Jotta tuloksia voidaan pyrkiä vertailemaan, tutkittiin lisäksi, mistä lähtökohdista opettajat suunnittelevat opetuksensa. Tässä luvussa tutkimustulokset vedetään yhteen ja tehdään johtopäätöksiä tutkimuksen pohjalta.

Peruskoulun oppikirjat (Laskutaito, Pii ja Kolmio) määrittelevät funktion sääntönä. Määritelmät eivät ole täsmällisiä. Määritelmissä kuitenkin korostetaan, että yhtä muuttujan arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo. Varsinaisesti viitteitä funktioon relaationa tai kuvauksena ei ole.

Lukion pitkän matematiikan oppikirjat (Pyramidi, Calculus ja Laudatur) määrittelevät funktion kuvauksena. Määritelmät ovat joukko-opillisia, mutta oppikirjoissa lähestymistä aiheeseen ei tehdä joukko-opin kautta. Joukko-oppi ei kuulu valtakunnallisten opetussuunnitelman perusteiden mukaan yläkoulun eikä lukion oppimäärään. Pohjatietojen puuttuminen joukko-opista vaikuttaa mahdollisuuteen ymmärtää funktiota kuvauksena kovinkaan syvällisellä tasolla. Lukion oppikirjoissa funktion määritelmä on kuitenkin matemaattisesti pätevä ja peruskoulun oppikirjoissakin peruskoulutasolle ymmärrettävä, vaikkakin matemaattisesti puutteellinen. Erot oppikirjojen välillä ovat vähäisiä.

Sekä peruskoulun että lukion oppikirjoissa funktio esitetään sääntönä tai riippuvuutena kahden suureen välillä. Ainoan poikkeuksen tekee lukion oppikirja Pyramidi, joka määrittelee funktion kuvauksena. Funktiokäsitys Pyramidissa on matemaattisin, ja oppikirjassa tukeudutaan johdonmukaisesti funktion määritelmään eikä pyritä luomaan opiskelijalle mielikuvaa funktiosta muilla keinoin. Pyramidissa funktio opetetaan osana joukko-oppia, vaikka varsinaisia joukkojen operaatioita tai relaatiota ei käydä läpi.

Oppikirjat Pyramidia lukuunottamatta pyrkivät luomaan mielikuvan funktiosta sääntönä tai riippuvuutena. Useimmiten oppikirjat muotoilevat funktion tarkoittavan sääntöä, joka kuvaa riippuvuutta. Mielikuvan luomiseen käytetään arkipäivästä tuttuja asioita kuten esimerkiksi todetaan hinnan olevan määrän funktio. Esimerkkinä funktiosta ja sen toiminnallisuudesta pidetään oppikirjoissa ”funktiokonetta”, johon syötetty luku muuttuu tietyn säännön mukaisesti ja tulostuu toisena lukuna. Funktiokone ei ole matematiikkaa vaan pikemminkin funktion havainnollistamisen apukeino. Kuitenkin funktiokone korostuu esimerkiksi yläkoulun Pii-kirjassa, jossa funktiokone käsitellään samoin kuin matemaattiset käsitteet.

Funktiota käsitellään oppikirjoissa lähinnä lausekkeena ja siitä esitellään symbolisen esitystavan jälkeen myös graafinen esitystapa. Graafista esitystapaa käytetään apuna ratkaistaessa esimerkiksi funktion nollakohtia tai tutkittaessa funktion kulkua. Numeerinen taulukoitu esitystapa esitellään yläkoulun oppikirjoissa, mutta sitä käytetään vain lineaarisen funktion piirtämisen apuna. Verbaalisesti eli sanoin funktiota ei kuvata kuin yläkoulun oppikirjoissa ”funktiokoneen” yhteydessä. Oppikirjoissa painottuu funktion arvojen laskeminen, vaikka oppikirjoissa pyritään lähestymään funktiota ymmärtämisen kautta.

Kyselytutkimuksen perusteella oppikirja ja opettajan omat kokemukset ovat tärkeimmät opetuksen suunnitteluun liittyvistä tekijöistä. Erittäin tärkeäksi opetuksen suunnitteluun vaikuttavaksi tekijäksi tutkimuksessa nousi oppilailla käytössä oleva oppikirja, mikä tukee aiempia tutkimuksia. Tuloksen perusteella voidaan pitää oppikirjojen funktiokäsitystä tärkeänä opetuksen ja oppilaiden oppimisen kannalta.

Toiseksi tärkeäksi tekijäksi opetuksen suunnittelussa nousi opettajan omat kokemukset. Lukion opettajilla omat kokemukset opetuksen suunnittelussa olivat tilastollisesti merkitsevästi tärkeämpiä kuin yläkoulun opettajilla. Oppikirja on opetuksen suunnittelussa tärkeä työväline, koska oppikirjassa on annettu valmiiksi opetettavat sisällöt ja tehtäviä. Omien kokemusten korostuminen tutkimuksessa osoittaa, että opettaja vaikuttaa tapoihin opettaa uutta asiaa oppilaille, vaikka hyödyntää esimerkiksi oppikirjan järjestystä ja tehtäviä.

Valtakunnallisen opetussuunnitelman perusteiden täyttyminen opetuksessa jää usein oppikirjan tekijöiden vastuulle. Noin kaksi viidesosaa opettajista ei käytä lainkaan tai käyttää vain vähän valtakunnallisia opetussuunnitelman perusteita tai koulukohtaista opetussuunnitelmaa opetuksen suunnittelussa.

Lukion opettajat suunnittelevat opetustaan huomioiden ylioppilaskokeiden vaatimukset ja tehtävätyypit. Ylioppilaskokeiden huomioiminen opetuksessa on ymmärrettävää keskittyessä saamaan opiskelijoille hyvät ylioppilaskoetulokset. Ylioppilaskokeiden vaatimukset saattavat jossain määrin määrätä, millaista ymmärrystä tai proseduraalista laskutaitoa opettaja opiskelijoilta vaatii.

Opettajat pitävät tärkeimpänä asiana funktion käsitteen opetuksessa funktion ymmärtämistä riippuvuutena. Tulos on ymmärrettävä, koska funktioita käytetään yläkoulussa ja lukiossa kuvaamaan riippuvuussuhteita. Tulos tukee myös oppikirjojen funktiokäsitystä. Vaikka oppikirjoissa funktio sääntönä nousi voimakkaasti esille, säännön tarkoitettiin kuvaavan riippuvuutta.

Lähes puolet opettajista pitää funktion merkintätapaa ja ominaisuuksia kaavana tai lausekkeena melko tärkeinä. Kuitenkin funktion ymmärtäminen riippuvuutena koetaan tärkeämmäksi kuin merkintä laskulausekkeena. Opettajilla on halu saada oppilaat ymmärtämään funktion käsite, vaikka heidän vaatimuksensa funktion käsitteestä saattavat olla epätäsmällisiä, suurpiirteisiä eikä matemaattisesti päteviä.

Funktio vastaavuutena erottui tutkimuksessa muista funktiokäsitystä kuvaavista luokista. Lukion opettajilla funktion ymmärtäminen vastaavuutena on tilastollisesti merkitsevästi tärkeämpää kuin yläkoulun opettajille. Sama tulos esiintyi jo oppikirjoja tarkastellessa, koska vain lukion oppikirjoissa funktio määritellään kuvauksena. Muissa funktiokäsitystä kuvaavissa luokissa sukupuoli, opettajan opetusvuosien määrä tai opetettava luokkataso eivät vaikuta merkitsevästi opettajien vastauksiin eivätkä luokat eroa toisistaan tilastollisesti merkitsevästi.

Tutkimus ei varsinaisesti pyrkinyt selvittämään opettajien omaa näkemystä funktion käsitteestä. Korkeasti koulutetun matematiikan opettajan oman aineenhallinnan ja sitä kautta funktion käsitteen ymmärtämisen tulee olla eri tasolla kuin mitä vaaditaan peruskoulun oppilailta. Funktion esittäminen riippuvuutena on yksinkertaistettu tapa selittää funktion käsitettä peruskoulussa, kun joukko-opin käsitteleminen ei kuulu opetussuunnitelmaan. Lukiossa mahdollisuudet matemaattisempaan esitystapaan olisi mahdollisia, mutta Pyramidia lukuunottamatta oppikirjoissa ei mahdollisuutta juuri käytetä hyväksi.

Tutkimuksessa opettajat jaettiin yläkoulun opettajiin ja lukion opettajiin. Lukion opettajat saattoivat opettaa lukion lisäksi myös yläkoulussa. Kukin opettaja täytti kyselylomakkeen vain kerran siitä huolimatta, että hän olisi vastannut eri tavalla yläkoulun ja lukion opetusta koskien. Mikäli opettajilla olisi ollut mahdollisuus vastata erikseen yläkoulun ja lukion opetukseen liittyen, tulokset olisivat olleet luotettavampia eikä kysymyksenasettelu olisi tuottanut niin paljon tulkinnanvaraisuutta.

Mielenkiintoista olisi tutkia käytettävän oppikirjan vaikutusta opetukseen. Tällöin eri oppikirjasarjojen käyttö pitäisi huomioida valitessa tutkimuksen otosta. Tämän tutkimuksen tiedoilla oppikirjan vaikutusta opetukseen on mahdoton tutkia luotettavasti, joten se jätettiin tekemättä.

LÄHTEET

[1] Opetushallitus, *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*, Vammalan kirjapaino Oy, 2004. Saatavissa (viitattu 4.11.2014): http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf

[2] Ylioppilastutkintolautakunta, *Ylioppilastutkinto Suomessa*. Saatavissa (viitattu 4.11.2014): http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/ylioppilastutkinto

[3] Lehtinen M., *Matematiikan historia*, Matematiikkalehti Solmu, 2000. Saatavissa (viitattu 21.12.2014): http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/

[4] Lipschutz S., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Set Theory and Related Topics*, 2th Edition, McGraw-Hill, 1998

[5] Vinner S., Dreyfus T., *Images and definitions for the concept of function*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, No. 4, 1989, pp. 356-366

[6] Salminen J., *Funktiokäsityksestä ja matematiikkakuvasta suomalaisessa Middle Years Programme -yläkoulussa*, Pro Gradu, Helsingin yliopisto, 2013. Saatavissa (viitattu 6.1.2015): https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/38480/Gradu_J_Salminen_2013.pdf?sequence=3

[7] Opetushallitus, *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*, Vammalan kirjapaino Oy, 2003. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

[8] Kangasaho J., Piri P., Taavitsainen H., *Pitkän matematiikan ylioppilaskokeet 2001-2011*, 12. painos, WSOYpro Oy, 2011

[9] Törnroos J., *Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset - Seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana*, Koulutuksen tutkimuslaitos, Tutkimuksia 13, Jyväskylän yliopisto, 2004. Saatavissa: http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-3226-8

[10] Rautopuro J., *Hyödyllinen pakkolasku - Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012*, Koulutuksen seurantaraportit 2013:3, Opetushallitus. Saatavissa (viitattu 5.12.2014): http://www.oph.fi/download/147904_Hyodyllinen_pakkolasku.pdf

[11] Mattila L., *Perusopetuksen matematiikan kansalliset oppimistulokset 9. vuosiluokalla 2004*, Oppimistulosten arviointi 2/2005, Opetushallitus. Saatavissa (viitattu 5.12.2014): http://www.oph.fi/download/115539_perusopetuksen_matematiikan_kansalliset_oppimistulokset_9_vuosiluokalla_2004.pdf.

[12] Hirvonen K., *Onko laskutaito laskussa? - Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011*, Koulutuksen seurantaraportit 2012:4, Opetushallitus. Saatavissa (viitattu 5.12.2014): http://www.oph.fi/download/140234_Onko_laskutaito_laskussa.pdf

[13] Heinonen J.P., *Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit: Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa*, Tutkimuksia 257, Helsingin yliopisto, 2005. Saatavissa (viitattu 4.11.2014): https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/20002/opetussu.pdf?sequence=1

[14] Korhonen H., *Perusopetuksen päättövaiheen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 2000*, Oppimistulosten arviointi 3/2001, Opetushallitus, Helsinki

[15] Niemi E.K., Metsämuuronen J., *Miten matematiikan taidot kehittyvät? - Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*, Koulutuksen seurantaraportit 2010:2, Opetushallitus. Saatavissa (viitattu 5.12.2014): http://www.oph.fi/download/126919_Miten_matematiikan_taidot_kehittyvat.pdf

[16] Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J., Paasonen J., Salmela M., Tahvanainen J. (2004). *Pitkä matematiikka 1: Funktiot ja yhtälöt*, WSOY Oppimateriaalit

[17] Englund B., *Lärobokskunskap, styrning och evelinflytande*, Pedagogisk Forskning i Sverige 1999 årg 4 nr 4 s. 327-348, Saatavissa:http://www.ped.gu.se/pedfo/pdf-filer/englund.pdf

[18] Haggarty, L., Pepin, B., *An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what?* British Educational Research Journal, Vo. 28, No: 4, 2012, pp. 567-590

[19] Häkkinen K., *Suomalaisen oppikirjan vaiheita*, Suomen tietokirjailijat ry, Helsinki, 2002

[20] Kananen J., *Kvali - Kvalitatiivisen tutkimuksen teoria ja käytänteet*, Jyväskylän ammattikorkeakoulun julkaisuja -sarja 93, Jyväskylän ammattikorkeakoulun kirjasto, 2008

[21] Saaranen-Kauppinen A. ja Puusniekka A., *Menetelmäopetuksen tietovaranto KvaliMOTV - Kvalitatiivisten menetelmien verkko-oppikirja*, Yhteiskuntatieteellisen tietoarkiston julkaisuja 2009, Tampereen yliopisto. Saatavissa (viitattu 10.12.2014): http://www.fsd.uta.fi/fi/julkaisut/motv_pdf/KvaliMOTV.pdf

[22] Hirsjärvi S., Remes P., Sajavaara P., *Tutki ja kirjoita*, Tammi, 2007

[23] Kansanen P., Uusikylä K., *Opetuksen tutkimuksen monet menetelmät*, PS-kustannus Opetus, 2000

[24] Laurinolli T., Luoma-aho E., Sankilampi T., Talvitie K., Vähä-Vahe O., *Laskutaito 9*, WSOY Oppimateriaalit, 2006

[25] Latva O., Tolvanen A., Tuomaala T., Järvinen R., Makkonen J.P., *Kolmio matematiikan tietokirja*, Tammi, 2008

[26] Heinonen M., Luoma M., Mannila L., Tikka T., *Pii 9*, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2009

[27] Kontkanen P., Liira R., Luosto K., Nurmi J., Nurmiainen R., Ronkainen A., Savolainen S., *Pyramidi 1: Funktiot ja yhtälöt*, Tammi, 2005

[28] Hautajärvi T., Ottelin J., Wallin-Jaakkola L., *Laudatur 1: Funktiot ja yhtälöt*, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2005

[29] Jäppinen P., Kupiainen A., Räsänen M., *Lukion Calculus 1*, Kustannusosakeyhtiö Otava, 2005

[30] Milton J.S., Arnold J.C., *Introduction to probability and statistics: Principles and Applications for Engineering and the Computing Sciences*, 2nd ed., McGraw-Hill Publishing Company, Inc., 1990

[31] Metsämuuronen J., *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä*, 2. painos, Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä, 2003

[32] Alaterä T. J., *Menetelmäopetuksen tietovaranto*, Tampereen yliopisto. Saatavissa (viitattu 14.3.2015): http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/index.html

[33] Nummenmaa T., Konttinen R., Kuusinen J., Leskinen E., *Tutkimusaineiston analyysi*, WSOY, Porvoo, 1997

[34] Lilliefors H.W., *On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown.* Journal of the American Statistical Association, Vol. 62, No. 318., 1967, pp. 399-402

A. KIRJOJEN VIITTAUKSET

Taulukko A.1: Peruskoulun oppikirjojen viittaukset funktioon

	Vastaavuus	Riippuvuusrelaatio	Sääntö
Laskutaito			”Funktio f on sääntö, jonka mukaan jokaista muuttujan x arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo $f(x)$.” (määritelmä) Funktiokoneen sääntö
Kolmio		”Häiden hinta riippuu vieraiden lukumäärästä.” (esimerkki) ”Matkaan käytetty aika riippuu nopeudesta” (esimerkki)	”Kahden suureen välistä säännönmukaista riippuvuutta kutsutaan matematiikassa funktioksi.” ”Suuretta, joka riippuu toisesta suureesta säännönmukaisesti, sanotaan tämän jälkimmäisen suureen funktioksi.” (määritelmä)
Pii		”Merkintä $f(x)$ tarkoittaa, että funktion arvo riippuu muuttujan x arvosta.” ”Tuotteesta maksettava hinta riippuu ostettavasta määrästä.” ”Funktion arvo riippuu muuttujan arvosta.” ”Kaksi suuretta voivat riippua toisistaan siten, että toisen arvo voidaan päätellä tai laskea, kun toisen arvo tunnetaan. Tällaisten suureiden välistä riippuvuussuhdetta kutsutaan funktioksi.”	”Funktio on sääntö, joka liittää jokaiseen muuttujan arvoon yhden tarkalleen määrätyn funktion arvon.” ”Kun funktiokoneeseen syötetään jokin luku, kone laskee säännön mukaan lukua vastaavan funktion arvon.”

	Kaava	Operaatio	Representaatio
Laskutaito	”Funktio määritellään usein antamalla funktion lauseke $f(x)$, jonka avulla funktion arvot voidaan laskea.” ”Muodosta funktion lauseke...” (esimerkki)	”Funktion arvo saadaan sijoittamalla funktion lausekkeeseen $f(x)$ muuttujan x paikalle luku.” (2. luvussa)	”Funktion f kuvaaja muodostuu niistä xy-koodinaatiston pisteistä (x, y), joissa $y = f(x)$.” (3. luku)
Kolmio	”Funktion arvo y saadaan sijoittamalla yhtälöön muuttujan x paikalle annettu luku ja laskemalla lausekkeen arvo.”		”Määritä kuvaajan avulla...”
Pii	”Funktion määrittelevä lauseke $f(x)$ sisältää muuttujan x, joka voi saada eri arvoja.” ”Funktion määrittelevä lauseke voidaan usein päätellä, kun tunnetaan riittävästi muuttujien arvoja ja niitä vastaavia funktion arvoja.”		”Sääntö voidaan ilmaista sanallisesti, matemaattisena lausekkeena, yhtälönä tai kuvaajan avulla.” ”Funktion määrittelevä lauseke voidaan usein päätellä, kun tunnetaan riittävästi muuttujien arvoja ja niitä vastaavia funktion arvoja.”

Taulukko A.2: Lukion oppikirjojen viittaukset funktioon

	Vastaavuus	Riippuvuusrelaatio	Sääntö
Pyramidi	”Funktio eli kuvaus f joukosta A joukkoon B liittää jokaiseen joukon A alkioon yhden joukon B alkion.” (määritelmä) ”Kun jokaiseen seitsemän veljeksen nimeen liitetään nimessä olevien kirjainten lukumäärä, on määritelty kuvaus eli funktio f seitsemän veljeksen nimien joukosta luonnollisten lukujen joukkoon.” (esimerkki) ”Esittääkö kuvio funktiota joukosta A joukkoon B?” (esimerkki)		
Laudatur	”Funktio liittää jokaiseen määrittelyjoukon pisteeseen täsmälleen yhden maalijoukon pisteen.” Funktio eli kuvaus f joukosta A joukkoon B tarkoittaa sääntöä, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon yksikäsitteisesti joukon B alkion. (määritelmä)	”Funktio liittyy ilmiöihin, joissa suureen arvo riippuu toisesta suureesta.” ”Irtokaramellipussin hinta riippuu karamellien määrästä.” ”Ympyrän pinta-ala riippuu säteestä.” ”Riippuvuus voidaan kirjoittaa muotoon $y = f(x)$, missä x on muttuja.”	”...Edellisten esimerkkien mukaista sääntöä kutsutaan matematiikassa funktioksi.” ”Funktio on sääntö, joka ilmoittaa asioiden välisen riippuvuussuhteen.”
Calculus	”Funktio joukosta A joukkoon B on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon tarkalleen yhden alkion joukosta B. (määritelmä)	”...sitä [funktiota] tarvitaan myös muissa tieteissä tutkittaessa muuttuvien suureiden välistä riippuvuutta.” ”Jonkin suureen arvo voi riippua siitä, mikä arvo toisella suureella on.” ”Kuljettu matka riippuu nopeudesta.” ”Lämpötila riippuu ajanhetkestä” ”Ympyrän ala riippuu säteen pituudesta.” ”Koetulos riippuu lukuajasta.” ”Yhtälö $y = x^2$ esittää lukujen x ja y välisen riippuvuuden.” (esimerkki)	”...f on funktion nimi ja tarkoittaa sääntöä, jolla muuttujasta x saadaan funktion arvo y.” ”Sääntönä, jolla muuttujan r arvoista saadaan funktion arvot, toimii laskulauseke $4\pi r^2$.” (esimerkki)

	Kaava	Operaatio	Representaatio
Pyramidi		”Funktion määräävät täysin ne arvot, jotka se saa eri kohdissa.”	”Kuvaajan piirtämiseksi ei yleensä riitä, että laskee funktion arvoja yksittäisissä kohdissa, vaan on ymmärrettävä, millaisia ominaisuuksia funktiolla on.”
Laudatur	”Jos suureen arvo saadaan matemaattisten laskutoimitusten avulla laskettua toisesta suureesta, tätä laskusääntöä sanotaan funktion lausekkeeksi”		”Usein riippuvuuden havainnollistaminen kuviona auttaa tulkintaa.”
Calculus			

B. KYSELYLOMAKE

Kysely matematiikan opettajille funktion käsitteen opetuksesta

Taustatiedot

Sukupuoli

- ○ Nainen
- ○ Mies

Millä luokilla opetat tai olet opettanut matematiikkaa?

Voit valita useamman kuin yhden vaihtoehdon.

- ☐ 1.-6. luokilla
- ☐ 7.-9. luokilla
- ☐ lukion lyhyttä matematiikkaa
- ☐ lukion pitkää matematiikkaa

Montako vuotta olet toiminut opettajana?

- ○ alle 2 vuotta
- ○ 2-5 vuotta
- ○ 6-10 vuotta
- ○ 11-20 vuotta
- ○ yli 20 vuotta

Koulutuksesi:

Opetuksen lähtökohdat

Valitse sopivin vaihtoehto, kuinka paljon käytät funktion käsitteen opetuksen suunnittelussa seuraavia asioita.

	en lainkaan				aina	en osaa sanoa
valtakunnallisen opetussuunnitelman perusteita	○	○	○	○	○	○
koulukohtaista opetussuunnitelmaa	○	○	○	○	○	○
oppilailla käytössä olevaa oppikirjaa	○	○	○	○	○	○
jotakin muuta oppikirjaa	○	○	○	○	○	○
opettajan opasta	○	○	○	○	○	○
ylioppilaskokeiden tehtävätyyppejä	○	○	○	○	○	○
ylioppilaskokeiden vaatimuksia	○	○	○	○	○	○
opettajakollegoiden ideoita	○	○	○	○	○	○
omia kokemuksia	○	○	○	○	○	○
jotain muuta	○	○	○	○	○	○

Mikäli käytät opetuksen suunnittelussa "jotain muuta", kerro omin sanoin mitä:

Mikä oppikirja oppilailla/opiskelijoilla on käytössä?

Funktiokäsitys

Valitse asteikolta vaihtoehto, kuinka tärkeänä pidät annettua väittämää funktion käsitteen opetuksen kannalta.

	merkityksetön				erittäin tärkeä	en osaa sanoa
Muuttujan arvoa operoimalla saadaan funktion arvo.	○	○	○	○	○	○
Funktio on operaatio.	○	○	○	○	○	○
Funktio kuvaa riippuvuutta.	○	○	○	○	○	○
Funktio on kaava, algebrallinen lauseke tai yhtälö.	○	○	○	○	○	○
Funktio on kahden joukon alkioiden välinen vastaavuus siten, että kutakin ensimmäisen joukon alkiota vastaa täsmälleen yksi jälkimmäisen joukon alkio.	○	○	○	○	○	○
Funktiota ei voida aina ilmaista matemaattisesti, mutta tietyn säännön avulla pystytään päättelemään funktion arvo.	○	○	○	○	○	○
Funktio kuvaa kahden suureen välistä yhteyttä.	○	○	○	○	○	○
Funktio voidaan määritellä sen yhden esitystavan (kuten graafisen tai symbolisen) avulla.	○	○	○	○	○	○
Funktio voidaan määritellä graafisen kuvaajan avulla.	○	○	○	○	○	○
Funktio määritellään antamalla funktion lauseke.	○	○	○	○	○	○
Funktio voidaan määritellä sanallisesti.	○	○	○	○	○	○
Funktio liittää jokaiseen määrittelyjoukon alkioon täsmälleen yhden maalijoukon alkion.	○	○	○	○	○	○

Funktio liittää jokaiseen muuttujan arvoon yhden tarkalleen määrätyn funktion arvon.	○	○	○	○	○	○
Funktio on toimenpide, jolla annetuista arvoista saadaan tietyin edellytyksin funktion arvot.	○	○	○	○	○	○
Funktio on matemaattinen esitystapa kahden suureen väliselle yhteydelle.	○	○	○	○	○	○
Kahden suureen välistä säännönmukaista riippuvuutta kutsutaan funktioksi.	○	○	○	○	○	○
Kaksi suuretta voivat riippua toisistaan siten, että toisen arvo voidaan laskea, kun toisen arvo tunnetaan.	○	○	○	○	○	○
Jos suureen arvo saadaan laskettua toisesta suureesta matemaattisten laskutoimitusten avulla, tätä laskusääntöä sanotaan funktion lausekkeeksi.	○	○	○	○	○	○
Funktio voidaan määritellä muuttujan arvoista ja niitä vastaavien funktion arvoista kootun taulukon avulla.	○	○	○	○	○	○
Funktio tarkoittaa sääntöä, jolla muuttujasta saadaan funktion arvo.	○	○	○	○	○	○
Funktio on kuvaus.	○	○	○	○	○	○
Funktion arvo riippuu muuttujan arvosta.	○	○	○	○	○	○
Funktio ”tekee” muuttujalle jotain saadakseen funktion arvon.	○	○	○	○	○	○
Funktiota voidaan havainnollistaa ”funktiokoneella”.	○	○	○	○	○	○

Anna esimerkki, mitä haluaisit oppilaan vastaavan kysymykseen: "Mikä on funktio?"

C. HAVAINTOARVOJAKAUMIEN NORMAALIJAKAUTUNEISUUDEN TESTAUS

Taulukko C.1: Opetuksen lähtökohtia testaavien muuttujien Kolmogorov-Smirnov-Lilliefors-testin testisuureet D, otoskoot N ja p-arvot.

Summamuuttuja	testisuure D	otoskoko N	p-arvo
Valtakunnallinen ops	0,197	76	0,000
Koulukohtainen ops	0,185	74	0,000
Käytettävä oppikirja	0,270	77	0,000
Muu oppikirja	0,169	74	0,000
Opettajan opas	0,169	72	0,000
Yo-tehtävätyypit	0,191	70	0,000
Yo-koe vaatimukset	0,250	69	0,000
Kollegoiden ideat	0,223	77	0,000
Omat kokemukset	0,353	78	0,000
Jotain muuta	0,287	31	0,000

Taulukko C.2: Funktiokäsityksen summamuuttujien Kolmogorov-Smirnov-Lilliefors-testin testisuureet D, otoskoot N ja p-arvot.

Summamuuttuja	testisuure D	otoskoko N	p-arvo
Vastaavuus	0,179	78	0,000
Riippuvuusrelaatio	0,279	78	0,000
Sääntö	0,286	78	0,000
Kaava	0,284	77	0,000
Operaatio	0,249	78	0,000
Representaatio	0,247	78	0,000

Testisuureen kriittisiksi arvoksi saadaan esimerkiksi

$$D = 0,1167 \qquad \text{kun } N = 78.$$

D. FREKVENSSITAULUKOT

Taulukko D.1: Opetuksen suunnittelun lähtökohtien prosenttiosuudet (%) ja frekvenssit (suluissa) eri vastausvaihtoehdoille sekä mediaanit Md.

Muuttuja	en lainkaan 1	vähän 2	jonkin verran 3	usein 4	aina 5	Yht.	Md
Valtakunnallinen ops	19,7	15,8	19,7	27,6	17,1		3
	(15)	(12)	(15)	(21)	(13)	(76)	
Koulukohtainen ops	12,2	27,0	20,3	24,3	16,2		3
	(9)	(20)	(15)	(18)	(12)	(74)	
Käytettävä oppikirja	1,3	2,6	9,1	40,3	46,8		4
	(1)	(2)	(7)	(31)	(36)	(77)	
Muu oppikirja	8,1	27,0	32,4	27,0	5,4		3
	(6)	(20)	(24)	(20)	(4)	(74)	
Opettajan opas	25,0	20,8	19,4	22,2	12,5		3
	(18)	(15)	(14)	(16)	(9)	(72)	
Yo-tehtävätyypit	58,8	32,4	5,9	2,9	0,0		1
(yläkoulu)	(20)	(11)	(2)	(1)	(0)	(34)	
(lukio)	5,6	16,7	33,3	30,6	13,9		3
	(2)	(6)	(12)	(11)	(5)	(36)	
Yo-koe vaatimukset	71,4	20,0	5,7	2,9	0,0		1
(yläkoulu)	(25)	(7)	(2)	(1)	(0)	(35)	
(lukio)	8,8	2,9	35,3	32,4	20,6		4
	(3)	(1)	(12)	(11)	(7)	(34)	
Kollegoiden ideat	6,5	14,3	40,3	33,8	5,2		3
	(5)	(11)	(31)	(26)	(4)	(77)	
Omat kokemukset	0,0	5,1	7,7	41,0	46,2		4
(yläkoulu)	(0)	(2)	(3)	(16)	(18)	(39)	
(lukio)	0,0	0,0	5,1	23,1	71,8		5
	(0)	(0)	(2)	(9)	(28)	(39)	
Jotain muuta	48,4	12,9	19,4	9,7	9,7		2
	(15)	(4)	(6)	(3)	(3)	(31)	

Taulukko D.2: Funktiokäsitysluokkien prosenttiosuudet (%) ja frekvenssit (suluissa) eri vastausvaihtoehdoille sekä mediaanit Md. Likert-asteikon numerointi kuvaa muuttujan tärkeyttä.

Summamuuttuja	ei lainkaan 1	hieman 2	jonkin verran 3	melko 4	erittäin 5	Yht.	Md
Vastaavuus	5,1 (4)	25,6 (20)	32,1 (25)	24,4 (19)	12,8 (10)	(78)	3
Riippuvuusrelaatio	0,0 (0)	1,3 (1)	17,9 (14)	55,1 (43)	25,6 (20)	(78)	4
Sääntö	1,3 (1)	10,3 (8)	38,5 (30)	47,4 (37)	2,6 (2)	(78)	4
Kaava	0,0 (0)	9,1 (7)	29,9 (23)	49,4 (38)	11,7 (9)	(77)	4
Operaatio	1,3 (1)	19,2 (15)	46,2 (36)	26,9 (21)	6,4 (5)	(78)	3
Representaatio	0,0 (0)	16,7 (13)	35,9 (28)	41,0 (32)	6,4 (5)	(78)	3

E. TULOSTEN MERKITSEVYYDEN TARKASTELU

Taulukko E.1: Yläkoulun ja lukion opettajien eroa kuvaavat p-arvo opetuksen lähtökohta -muuttujissa ja merkitsevä ero 5 % riskitasolla merkitty tähdellä.

Muuttuja	sukupuoli p-arvo (Mann-Whitney)	luokkataso p-arvo (Mann-Whitney)	opetusvuodet p-arvo (Kruskal-Wallis)
Valtakunnallinen ops	0,049 *	0,949	0,553
Koulukohtainen ops	0,001 *	0,735	0,294
Käytettävä oppikirja	0,866	0,565	0,957
Muu oppikirja	0,065	0,911	0,111
Opettajan opas	0,171	0,826	0,104
Yo-tehtävätyypit	0,420	0,000 *	0,044 *
Yo-koe vaatimukset	0,147	0,000 *	0,040 *
Kollegoiden ideat	0,166	0,872	0,323
Omat kokemukset	0,308	0,020 *	0,338
Jotain muuta	0,949	0,597	0,268

Taulukko E.2: Sukupuolen, opetettavan luokkatason ja opetusvuosien p-arvot funktiokäsitysluokissa. Merkitsevä ero 5 % riskitasolla on merkitty tähdellä.

Summauuttuja	sukupuoli p-arvo (Mann-Whitney)	luokkataso p-arvo (Mann-Whitney)	opetusvuodet p-arvo (Kruskal-Wallis)
Vastaavuus	0,759	0,003 *	0,022 *
Riippuvuusrelaatio	0,182	0,606	0,518
Sääntö	0,729	0,498	0,456
Kaava	0,516	0,914	0,108
Operaatio	0,919	0,638	0,948
Representaatio	0,123	0,059	0,755

F. SPEARMANIN KORRELAATIOMATRIISI

Taulukko F.1: Spearmanin korrelaatiokertoimet ja p-arvot (suluissa) funktiokäsitysluokille. Merkitsevä ero 1 % riskitasolla on merkitty tähdellä. Lyhenteet tarkoittavat Vast. = vastaavuus, Riip. = riippuvuusrelaatio, Oper. = operaatio, Rep. = representaatio.

	Vast.	Riip.	Sääntö	Kaava	Oper.	Rep.
Vast.	1,000					
Riip.	0,192 (0,091)	1,000				
Sääntö	0,167 (0,144)	0,545 (0,000) *	1,000			
Kaava	0,188 (0,101)	0,559 (0,000) *	0,311 (0,006) *	1,000		
Oper.	0,188 (0,100)	0,375 (0,001) *	0,449 (0,000) *	0,345 (0,002) *	1,000	
Rep.	0,142 (0,214)	0,533 (0,000) *	0,532 (0,000) *	0,399 (0,000) *	0,315 (0,005) *	1,000